

## 专题: 二维及拓扑自旋物理 • 封面文章

## 磁子霍尔效应\*

金哲珺雨 曾钊卓 曹云姗 严鹏†

(电子科技大学物理学院, 电子薄膜与集成器件国家重点实验室, 成都 611731)

(2023 年 9 月 29 日收到; 2023 年 11 月 29 日收到修改稿)

霍尔效应是凝聚态领域中古老却又极具潜力的研究领域, 其起源可以追溯到数百年前. 1879 年, 霍尔发现将载流导体置于磁场中时, 磁场带来的洛伦兹力将使得电子在导体的一侧积累, 这一新奇的物理现象被命名为霍尔效应. 之后, 一系列新的霍尔效应被发现, 包括反常霍尔效应、量子霍尔效应、自旋霍尔效应、拓扑霍尔效应和平面霍尔效应等. 值得注意的是, 霍尔效应能够实现不同方向的粒子流之间的相互转化, 因此在信息传输过程中扮演着重要的角色. 在玻色子体系 (如磁子) 中, 相应的一系列磁子霍尔效应也被发现, 他们共同推动了以磁子为基础的自旋电子学的发展. 本文回顾了近年来在磁子体系中的霍尔效应, 简述其现代半经典的处理方法, 包括虚拟电磁场理论和散射理论等. 并进一步介绍了磁子霍尔效应的物理起源, 概述了不同类型磁子的霍尔效应. 最后, 对磁子霍尔效应的发展趋势进行了展望.

**关键词:** 磁子, 霍尔效应, 非线性霍尔效应, 自旋电子学**PACS:** 75.40.Gb, 75.78.-n, 75.78.Cd, 11.15.-q**DOI:** 10.7498/aps.73.20231589

## 1 引言

自旋电子学 (spintronics) 是以自旋为基础, 研究对固态系统中自旋的主动控制和操纵的一个多学科领域<sup>[1]</sup>. 传统的自旋电子学以电子自旋为研究对象, 但是电荷在移动过程中会带来不可避免的焦耳热, 使得电子体系中难以实现信息的低能耗传输. 自旋波 (spin wave) 是由于电子自旋之间交换作用而在磁体中自发产生的一种元激发, 因其具有波的形式而被称为自旋波, 其量子化的准粒子又被称为磁子 (magnon). 由于磁子在传输信息的过程中不需要电荷的移动, 因此也不存在现代电子技术固有的缺点. 此外, 磁子的粒子自由度, 如自旋角动量、动量和能量以及自旋波的波动自由度, 如相位、频率和振幅等都可以用于传输信息. 这些特性使得基于磁子 (或自旋波) 的自旋电子学器件在传输信息的过程中具有诸多优点, 如低能耗、较长的

传输距离以及丰富的信息自由度等. 这也催生了一个年轻领域——磁子学 (magnonics)<sup>[2-4]</sup>.

霍尔效应 (Hall effect) 一直是信息传输过程和设计自旋电子学存储器件的核心. 不同类型的霍尔效应可以实现电子的电荷流和自旋流在不同传播方向之间的转化. 具体来说, 传统的霍尔效应通过外磁场实现纵向电场和横向电流之间的转变<sup>[5]</sup>. 反常霍尔效应 (anomalous Hall effect) 则是不需要外磁场作用的情况下实现自旋极化电流之间的相互转化<sup>[6-9]</sup>. 自旋霍尔效应 (spin Hall effect) 通过自旋-轨道耦合来实现纵向电荷流和横向自旋流之间的转变<sup>[10-13]</sup>. 拓扑霍尔效应 (topological Hall effect) 则描述了实空间拓扑诱导的纵向电荷流转变为横向自旋流这一现象<sup>[14-17]</sup>. 另一方面, 霍尔效应分为由外禀因素诱导的非本征霍尔效应和内禀因素主导的本征霍尔效应. 其中本征霍尔效应强烈依赖于电子自旋和倒空间的贝里曲率 (Berry curvature). 贝里曲率最初起源于微分几何, 它表

\* 国家重点研发计划 (批准号: 2022YFA1402802) 和国家自然科学基金 (批准号: 12074057, 12374103) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: yan@uestc.edu.cn

征了波函数随波矢  $\mathbf{k}$  的变化速度与  $\mathbf{k}$  空间能带结构的关联性. 自 20 世纪 70 年代以来, 这种贝里曲率一直在反常霍尔效应的背景下进行讨论, 但当时它并不被称为贝里曲率. 直到 Berry<sup>[18]</sup> 在 1984 年发表了开创性的工作, 它的数学性质和在物理现象中的作用才进一步得到了澄清. 除了倒空间拓扑之外, 实空间拓扑也会诱导霍尔效应, 具体来讲, 当电子经过拓扑磁织构时, 其自旋会沿着磁结构的自旋进行绝热演化, 相应的角动量转移过程诱导了一个虚拟磁场的产生, 继而使得电子或者磁子发生偏转, 这被称为拓扑霍尔效应. 该现象最早在 MnSi 体系中被观测到, 被证明是来自一种拓扑磁孤子——斯格明子 (skyrmion) 的贡献<sup>[14]</sup>. 斯格明子的概念起源于由 Skyrme<sup>[19]</sup> 提出的非线性  $\sigma$  模型, 随后在中心反演对称破缺磁性材料中被发现<sup>[20–22]</sup>, 被认为是一种具有拓扑保护的磁结构. 但自旋和  $\mathbf{k}$  空间的能带拓扑并不是电子体系的专属, 作为一类典型的玻色子, 磁子也具有自旋角动量和相应的能带拓扑, 而磁子与广泛存在的拓扑缺陷之间的相互作用更是难以避免. 探索由倒空间和实空间拓扑引起的磁子霍尔效应是磁子学的重要研究方向.

本综述将回顾磁子霍尔效应的发展历程, 介绍由自旋-轨道耦合诱导的磁子霍尔效应, 以及基于拓扑磁孤子的拓扑霍尔效应, 还有同贝里曲率偶极子 (Berry curvature dipole) 相关联的非线性霍尔效应和最新报道的基于三磁子过程的磁子非线性拓扑自旋霍尔效应. 最后简要讨论该领域的未来, 并探讨一些潜在的研究方向和尚未解决的问题.

## 2 磁子霍尔效应

无论是玻色子还是费米子, 其本征自旋霍尔效应通常都来自于贝里相位 (Berry phase) 诱导的虚拟磁场, 即贝里曲率. 具体来说, 类似于电动力学中利用矢势构建电磁场, 贝里相位可以被近似为动量空间的磁通量, 而贝里曲率则对应着动量空间的磁场. 该等效磁场将对输运电子产生一个正比于贝里曲率的横向速度, 这便是导致电子霍尔效应的内禀机制. 其在粒子输运方程中的作用可以通过将玻色子或费米子的波函数近似为波包的方法得到. 这种半经典的方法最早应用在电子体系, 具体来说, 在周期性系统中, 电子波函数可以表示为布洛赫波函数:  $\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_n(\mathbf{k}, \mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ . 尽管这个布洛赫波

函数是空间扩展的, 但电子波包可以被构造为布洛赫波的线性组合, 其在参数空间  $(\mathbf{k}, \mathbf{r})$  的半经典运动方程为<sup>[23]</sup>

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_n(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} - \dot{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\Omega}_n(\mathbf{k}), \quad \hbar \dot{\mathbf{k}} = -e\mathbf{E}, \quad (1)$$

其中,  $E_n$  是电子第  $n$  个本征态的本征值,  $e$  是电子电荷,  $\hbar$  是约化普朗克常数,  $\boldsymbol{\Omega}_n(\mathbf{k})$  为电子的贝里曲率. (1) 式第一个等号右边的第二项垂直于电场  $\mathbf{E}$  方向, 这正是电子本征霍尔效应的来源.

### 2.1 交换自旋波的磁子霍尔效应

在不考虑偶极相互作用的情况下, 类比电子的半经典运动方程, 构造出短波长自旋波的波包运动方程<sup>[24]</sup>:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon_n(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} - \dot{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\Omega}_n(\mathbf{k}), \quad \hbar \dot{\mathbf{k}} = -\nabla U(\mathbf{r}), \quad (2)$$

其中  $\varepsilon_n$  是磁子第  $n$  个本征态的本征值,  $U(\mathbf{r})$  为体系的势能. 同样地, 倒空间的贝里曲率

$$\boldsymbol{\Omega}_n = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \text{Im} \left\langle \frac{\partial u_{n,\mathbf{k}}}{\partial k_\alpha} \left| \frac{\partial u_{n,\mathbf{k}}}{\partial k_\beta} \right. \right\rangle,$$

也是决定磁子霍尔效应的关键因素, 其中  $u_{n,\mathbf{k}}$  是布洛赫函数的周期部分,  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$  为反对称张量. 由于磁子不存在电荷, 因此不受电场的调控, 但是磁体系中的能量变化可以形成有效的电场力:  $\nabla U(\mathbf{r})$ . 对于共线磁体而言, 磁子在体系边界处会受到不为零的有效电场力, 这直接导致了在边界处磁子的反常速度  $\dot{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\Omega}_n$ , 和相应的边界磁子流

$$I_y = - \int_a^b dx \partial_x U \left\{ \frac{1}{\hbar V} \sum_{n,\mathbf{k}} \rho[\varepsilon_{n,\mathbf{k}} + U(\mathbf{r})] \Omega_{n,z}(\mathbf{k}) \right\},$$

其中  $x = a$  和  $x = b$  分别代表体系内和体系外,  $\rho(\varepsilon)$  为磁子的分布函数. 该磁子流和边界的形状无关, 因此其具有极强的鲁棒性, 可围绕整个边界运动, 如图 1(b) 和图 1(c) 所示<sup>[24]</sup>.

与电子体系类似, 除了围绕边界的运动外, 磁子波包在运动过程中也会经历所谓的自转. 类比于电子的自转角动量的表达式, 可以得到磁子波包的自转角动量:

$$l_z^{\text{self}} = -\frac{2}{\hbar V} \text{Im} \sum_{n,\mathbf{k}} \rho_n \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial k_x} \left| (H - \varepsilon_{n\mathbf{k}}) \right| \frac{\partial u_n}{\partial k_y} \right\rangle. \quad (3)$$

考虑波函数的归一化条件:  $\sum_n |u_n(\mathbf{k})\rangle \langle u_n(\mathbf{k})| = 1$ , 方程 (3) 可以重写为

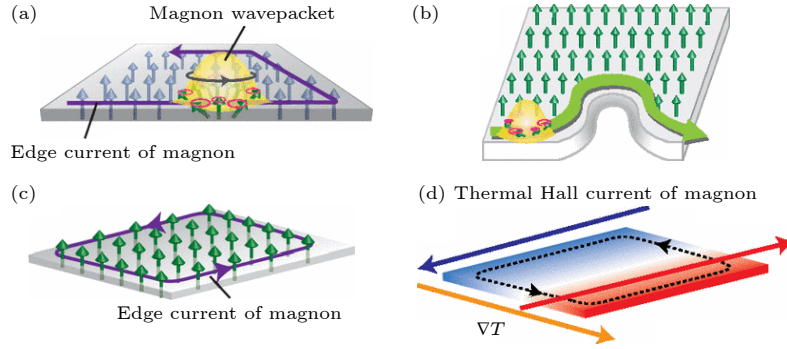


图 1 (a) 磁子波包的自转和绕着系统边界的磁子流; (b) 沿着边界传输且与边界形状无关的磁子流; (c) 平衡态时的边界磁子流; (d) 温度梯度导致的有限热霍尔磁子流<sup>[24]</sup>

Fig. 1. (a) Self-rotation of a magnon wave packet and a magnon edge current; (b) the magnon near the boundary proceeds along the boundary, irrespective of the edge shape; (c) magnon edge current in equilibrium; (d) under the temperature gradient, a finite thermal Hall current will appear<sup>[24]</sup>.

$$I_z^{\text{self}} = -\frac{2}{\hbar V} \text{Im} \sum_{n,n',\mathbf{k}} \rho_n \times \frac{\left\langle u_n \left| \frac{\partial H}{\partial k_x} \right| u_{n'} \right\rangle \left\langle u_{n'} \left| \frac{\partial H}{\partial k_y} \right| u_n \right\rangle}{\varepsilon_{n'} - \varepsilon_n}. \quad (4)$$

贝里曲率可表示为

$$\Omega_n = -\frac{2}{\hbar V} \text{Im} \sum_{n,n',\mathbf{k}} \rho_n \times \frac{\left\langle u_n \left| \frac{\partial H}{\partial k_x} \right| u_{n'} \right\rangle \left\langle u_{n'} \left| \frac{\partial H}{\partial k_y} \right| u_n \right\rangle}{(\varepsilon_{n'} - \varepsilon_n)^2},$$

方程 (4) 和贝里曲率有着极高的相似性。

因此, 磁子波包的自转行为和绕边界的旋转过程都由动量空间有限的贝里曲率决定. 图 1(a) 给出了磁子的自旋运动和绕边界的运动<sup>[24]</sup>. 当系统处于平衡态时, 磁子流沿着系统边界循环传播, 其在两个相反边界处的大小相等, 导致通过磁体的总热流为零. 在施加温度梯度 (图 1(d)) 后, 磁子将从高温区流向低温区, 这就打破了两个相反边界处的热流平衡, 从而导致横向非零热霍尔磁子流的产生<sup>[24]</sup>. 此外, Zhang 等<sup>[25]</sup>研究表明, 这些边界磁子流实际上是由非平凡的拓扑磁子能带所导致的手性边界态. 这些边界态存在单向传播和拓扑保护的特性, 因而能够免疫缺陷和无序的干扰. 总之, 具有鲁棒特性的磁子霍尔效应起源于磁子的非平凡能带结构.

在电子体系中, 电子的自旋霍尔效应通常来自于由自旋-轨道耦合诱导的贝里曲率. 在中心反演对称性破缺的体系中, 自旋-轨道耦合通常会在自旋哈密顿量中引入 Dzyaloshinskii-Moriya (DM) 相互作用<sup>[26,27]</sup>. 2010 年, Katsura 等<sup>[28]</sup>预测了在具

有 DM 相互作用的 Kagome 晶格体系中磁子流的热霍尔效应, 该效应同年被 Onose 等<sup>[29]</sup>在共线铁磁绝缘体  $\text{Lu}_2\text{V}_2\text{O}_7$  中所证实.  $\text{Lu}_2\text{V}_2\text{O}_7$  体系可以由以下哈密顿量来描述:

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} [-J\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + D_{ij} \cdot (\mathbf{S}_i \times \mathbf{S}_j)] - \mathbf{h} \cdot \sum_i \mathbf{S}_i, \quad (5)$$

式中, 第一项代表海森伯交换能, 第二项代表 DM 相互作用, 第三项则是磁场导致的塞曼能. DM 相互作用的强度和形式由  $D_{ij} = \mathbf{D}_{ij} \cdot \mathbf{n}$  决定, 其中  $\mathbf{D}_{ij}$  为体系 DM 矢量的方向,  $\mathbf{n}$  代表沿磁场方向的单位矢量. 为了计算不同磁子态之间的传输矩阵元, 将哈密顿量转变为自旋算符的表达式:

$$\begin{aligned} H &= -J\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + D_{ij} \cdot (\mathbf{S}_i \times \mathbf{S}_j) \\ &= -\frac{J}{2}(S_i^+ S_j^- + S_i^- S_j^+) \\ &\quad + i\frac{D_{i,j}}{2}(S_i^+ S_j^- - S_i^- S_j^+), \end{aligned} \quad (6)$$

其中,  $S_i^+ = S_{i,x} + iS_{i,y}$ ,  $S_i^- = S_{i,x} - iS_{i,y}$  分别对应自旋的升降算符;  $J$  为交换能的大小. 由于该体系具有平移对称性, 因此可以将磁子态拟设为布洛赫态  $|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \times \sum_i \mathbf{e}^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} |i\rangle$ , 不同磁子态之间的传输由以下矩阵元决定:

$$\begin{aligned} &\langle i | -J\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + D_{ij} \cdot (\mathbf{S}_i \times \mathbf{S}_j) | j \rangle \\ &= \langle i | -\frac{J}{2}(S_i^+ S_j^- + S_i^- S_j^+) \\ &\quad + i\frac{D_{i,j}}{2}(S_i^+ S_j^- - S_i^- S_j^+) | j \rangle = A e^{i\phi_i}, \end{aligned} \quad (7)$$

式中  $A e^{i\phi_i} = J + iD_{ij}$ , 其幅角  $\phi_i$  由 DM 相互作用



的强度所决定.

(7) 式中矩阵元的虚部表明了 DM 相互作用在磁子输运过程中类似于一个矢势, 并且作为一个“轨道磁场” (orbital magnetic field), 其产生一个作用于磁子的有效洛伦兹力, 继而诱导磁子的霍尔效应. 值得注意的是该矢势一方面依赖于 DM 矢量的方向, 即当 DM 矢量和自旋平衡态垂直时不会对矢势有所贡献, 另一方面也强烈依赖于材料的晶格类型. 若要保证 DM 相互作用诱导的有效磁通不会被抵消, 则需要单位晶格内的有效磁通不为零<sup>[30]</sup>. 以烧绿石和钙钛矿结构为例, DM 相互作用诱导的幅角  $\phi_i$  在烧绿石的晶胞内不抵消, 继而诱导了有限的总磁通, 如图 2(a) 所示. 而在扭曲的钙钛矿结构中, DM 相互作用诱导的总幅角为零, 其相应的总磁通也为零, 如图 2(b) 所示.

上述结果表明了电子的自旋-轨道耦合会同时诱导电子和磁子的霍尔效应. 但是电子和磁子的自旋角动量存在一定的差别, 在磁子体系中是否也存在对应的自旋-轨道耦合? 即随动量空间变化的磁子极化, 并且相应的耦合能否诱导磁子的霍尔效应? 为了解决这些问题, Shen<sup>[31]</sup> 研究了反铁磁体系中偶极相互作用对磁子极化和输运的影响, 通过在哈密顿量中考虑偶极相互作用并考虑长波近似条件, 可以求得磁子在该体系中的本征函数:

$$\psi_{\mathbf{k}}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_{\mathbf{k}} \pm e^{2i\phi_{\mathbf{k}}} \beta_{\mathbf{k}}), \quad (8)$$

式中,  $\alpha_{\mathbf{k}}$  和  $\beta_{\mathbf{k}}$  分别对应反铁磁中的左旋和右旋磁子波函数,  $\phi_{\mathbf{k}}$  为波矢在  $x$ - $y$  平面的方位角. 该本征波函数表明了左旋和右旋磁子的耦合, 产生了波矢  $\mathbf{k}$  依赖的自旋进动轨迹 (即波矢依赖的磁子极化), 如图 3(a) 所示. 这类似于电子体系的自旋-轨道耦合. 考虑磁子沿着面内方向传播, 并参考电子体系中诱导自旋霍尔效应的贝里曲率表达式<sup>[11]</sup>, 可以得到两种磁子模式的贝里曲率:

$$\Omega_z^{\pm} = \pm \frac{c_s^2}{\Delta_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}} \sin^2(\phi_{\mathbf{k}}), \quad (9)$$

其中,  $c_s$  由海森伯交换能和体系晶格参数决定,  $\Delta_{\mathbf{k}}$  则由磁子色散和  $c_s$  决定. 由方程 (9) 可知, 两种磁子会获得相反的贝里曲率, 继而导致磁子自旋霍尔效应, 如图 3(b) 所示.

## 2.2 静磁自旋波的磁子霍尔效应

上述的磁子霍尔效应都是基于短波长自旋波, 即交换自旋波的霍尔效应. 然而, 磁性体系中广泛存在着的偶极相互作用在长波长自旋波的输运过程中扮演着极为重要的角色. 根据波长的不同, 自旋波可以分为静磁自旋波、交换静磁自旋波和交换自旋波<sup>[32,33]</sup>, 如图 4(a) 所示. 根据静磁自旋波的平

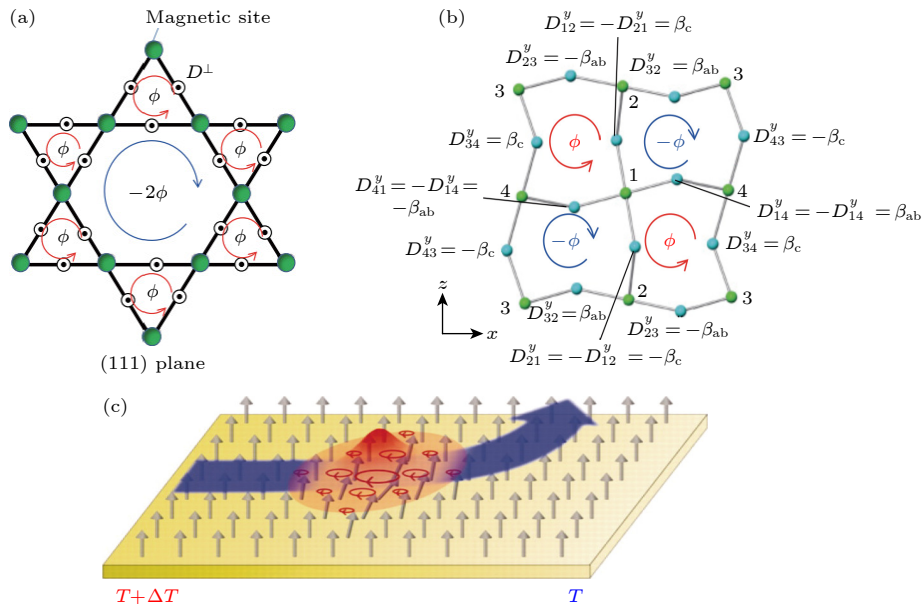


图 2 DM 相互作用在烧绿石 (111) 平面中诱导的幅角  $\phi_i$  分布 (a) 和在扭曲的钙钛矿的  $z$ - $x$  平面中诱导的幅角分布 (b)<sup>[30]</sup>; (c) 磁子的霍尔效应示意图<sup>[29]</sup>

Fig. 2. Spiral distribution of  $\phi_i$  induced by DM interaction in the (111) plane of the pyrochlore lattice (a) and the  $z$ - $x$  plane of the distorted perovskite structure (b)<sup>[30]</sup>; (c) schematic of magnon Hall effect<sup>[29]</sup>.

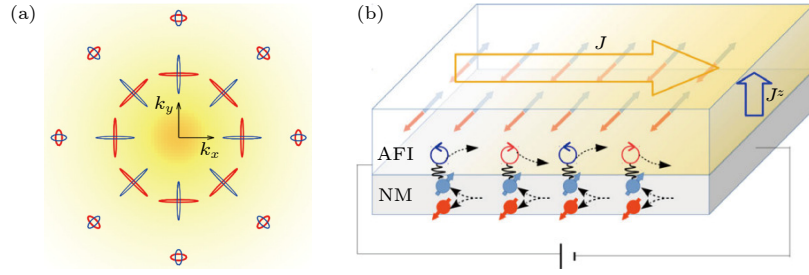


图 3 (a) 磁子的极化, 即自旋的进动轨迹和波矢的关系; (b) 偶极-偶极相互作用力在反铁磁体系中诱导的磁子自旋霍尔效应的示意图<sup>[31]</sup>

Fig. 3. (a) The polarization, i.e., the trajectory of the spin precession as a function of wave vectors; (b) schematic of magnon spin Hall effect induced by the dipolar interaction<sup>[31]</sup>.

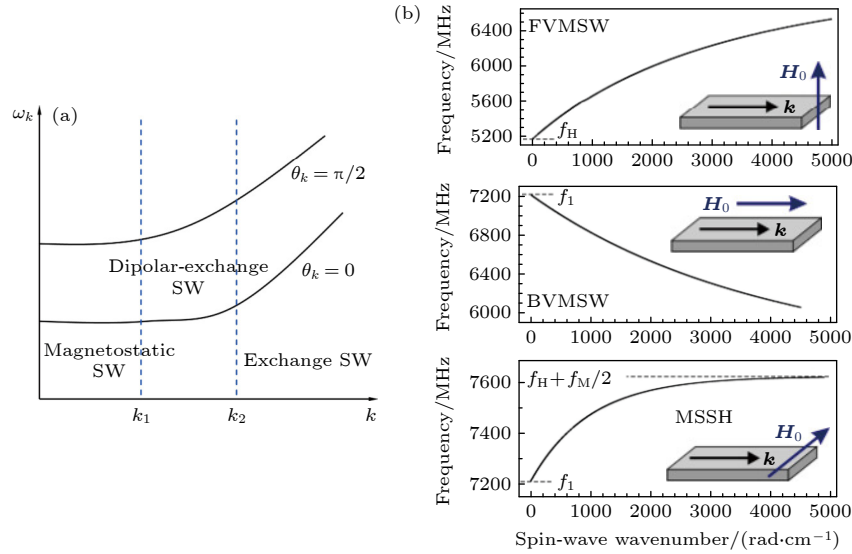


图 4 (a) 磁椭球中磁子的色散关系; (b) 钇铁石榴石 (YIG) 中不同类型的静磁模自旋波<sup>[35]</sup>

Fig. 4. (a) Dispersion relation of SW for a magnetic ellipsoid; (b) different types of magnetostatic SWs in yttrium iron garnet (YIG)<sup>[35]</sup>.

衡态和波矢的相对方向, 其也可以分为三种类型, 如图 4(b) 所示. 与交换自旋波类似, 静磁自旋波同样能经历由贝里曲率诱导的磁子霍尔效应. 不同的是, 其贝里曲率的表达式需要重写为  $-\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \text{Im} \times \left\langle \frac{\partial \mathbf{m}_{n,\mathbf{k}}}{\partial k_\alpha} \middle| \sigma_y \middle| \frac{\partial \mathbf{m}_{n,\mathbf{k}}}{\partial k_\beta} \right\rangle$ <sup>[34]</sup>, 其中  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$  是反对称张量, 这是由静磁自旋波特殊的归一化关系所决定的, 即  $\langle \mathbf{m}_{n,\mathbf{k}} | \sigma_y | \mathbf{m}_{n,\mathbf{k}} \rangle = 1$ . 当自旋平衡态  $\mathbf{M}_0$  躺在面内时 ( $\theta = \pi/2$ ) 系统在时间反演操作和面内旋转  $180^\circ$  的联合操作下保持不变, 使得贝里曲率为零. 这对应着静磁后向体模式 (BVMSW) 和静磁表面自旋波 (MSSW) 模式. 另一方面, 对于静磁前向体模式 (FVMSW), 由于其饱和磁化强度是面外方向的 ( $\theta = 0$ )<sup>[35]</sup>, 所以贝里曲率不为零.

当只存在偶极相互作用时, 系统第  $n$  个本征值 ( $n$  为整数) 对应的静磁自旋波波函数为

$$\mathbf{m}_{n,\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} i\kappa k_x + v k_y \\ -v k_x + i\kappa k_y \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{p}kz + \frac{n\pi}{2}\right), \quad (10)$$

其中,  $\kappa = \frac{\omega_M \omega_H}{\omega_H^2 - \omega_n^2}$ ,  $v = \frac{\omega_M \omega_n}{\omega_H^2 - \omega_n^2}$ ,  $p = -1 - \kappa > 0$ .  $\omega_H = \gamma H_0$  由静磁场决定,  $\omega_M = \gamma M_s$  由体系的饱和磁化强度  $M_s$  决定,  $\omega_n$  则是其倒空间第  $n$  个本征值. 将对应的波函数代入静磁波的贝里曲率表达式, 可以得到第  $n$  个静磁波模式的贝里曲率:

$$\Omega_{n,z}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\omega_H k} \frac{\partial \omega_n}{\partial k} \left(1 - \frac{\omega_H^2}{\omega_n^2}\right). \quad (11)$$

图 5(a) 和图 5(b) 分别给出了在  $H_0 = M_s$  的情况下, 静磁前向体模式的本征值和贝里曲率对  $\mathbf{k}$  和  $n$  的依赖性.

根据静磁自旋波的贝里曲率, 也可以估计其在  $k_B T \gg \hbar \omega_H$  情况下的热霍尔电导<sup>[34]</sup>:

$$\kappa_{xy} \approx \frac{k_B \omega_M N}{8\pi} \left[1 - r \log\left(1 + \frac{1}{r}\right)\right], \quad (12)$$

其中,  $r = H_0/M_s$ ,  $N = L/l_{\text{ex}}$ ,  $l_{\text{ex}}$  是交换长度,  $L$  则为磁体的层厚度. (12) 式表明静磁自旋波的热霍尔电导与温度无关.

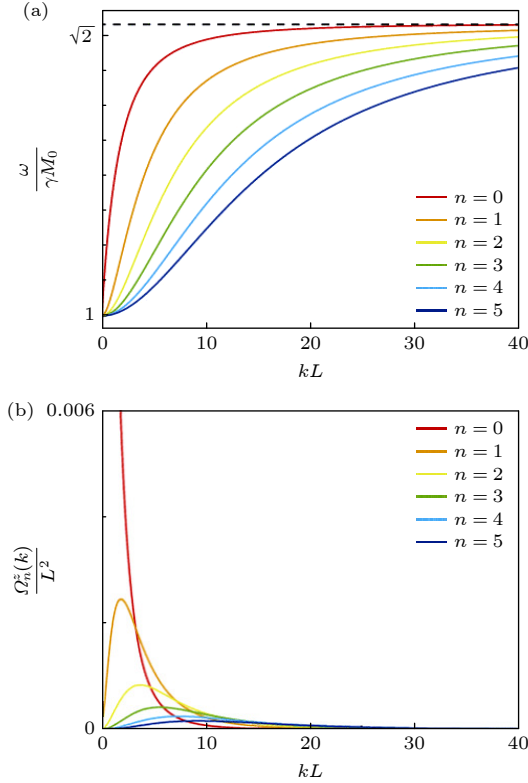


图 5 在  $H_0 = M_0$  情况下, 静磁前向体模式的色散关系 (a) 和贝里曲率分布 (b)<sup>[34]</sup>

Fig. 5. Dispersion (a) and Berry curvature (b) for the magnetostatic forward volume-wave mode for  $H_0/M_0 = 1$  <sup>[34]</sup>.

### 3 拓扑磁子霍尔效应

除倒空间拓扑之外, 实空间拓扑也同样可以诱导出携带自旋的粒子的霍尔效应. 具体来讲, 当携带自旋角动量的粒子经过空间非共线磁织构时, 由于自旋角动量的转移, 粒子会经历一个感生磁场, 在有效洛伦兹力的作用下, 粒子运动轨迹发生偏转, 这一现象被称为拓扑霍尔效应. 该效应最早在电子体系中被报道<sup>[14]</sup>. 同样, 携带自旋角动量的磁子在经过实空间的拓扑磁织构时也会经历由虚拟磁场诱导的有效洛伦兹力, 这一现象被称为拓扑磁子霍尔效应<sup>[36]</sup>.

#### 3.1 虚拟电磁场理论

磁子在经过拓扑磁织构时感受到的有效磁场的来源可以这样来理解: 当把非共线磁织构中的自

旋通过局域旋转矩阵变换到  $z$  轴时, 规范变换会将原本的空间导数转变为协变导数的形式  $\partial_\mu + \mathbf{A}_\mu$ ,  $\mu = x, y$ . 这里,  $\mathbf{A}_\mu = \mathbf{R}^{-1}\partial_\mu\mathbf{R}$  是一个  $3 \times 3$  的反对称矩阵,  $\mathbf{R}$  是旋转矩阵:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\phi & -\sin\phi & \cos\phi \sin\theta \\ \cos\theta \sin\phi & \cos\phi & \sin\phi \sin\theta \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (13)$$

式中,  $\theta$  和  $\phi$  分别代表自旋的极化角和方位角. 对自旋应用 Holstein-Primakoff (HP) 变换<sup>[37]</sup>:

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{1}{\sqrt{2S}} \left( a + a^\dagger - \frac{a^\dagger a a + a^\dagger a^\dagger a}{4S} \right), \\ S_y &= -\frac{i}{\sqrt{2S}} \left( a - a^\dagger - \frac{a^\dagger a a - a^\dagger a^\dagger a}{4S} \right), \\ S_z &= 1 - a^\dagger a / S, \end{aligned} \quad (14)$$

代入磁体系的拉氏量:

$$\mathcal{L} = \int \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{S}} - [A(\nabla \mathbf{S})^2 + D\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{S}) - K S_z^2] d\mathbf{r}, \quad (15)$$

其中  $\mathbf{A} = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{S}) / (1 + \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega})$  是沿着方向  $\boldsymbol{\Omega}$  的磁单极的磁矢势. 保留到玻色算子  $a$ ,  $a^\dagger$  的二阶项, 可以得到不考虑磁子-磁子相互作用的二阶哈密顿量:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= \int [-iA(a^\dagger \partial_r a - a \partial_r a^\dagger) - a^\dagger a (\cos\theta \partial_t \phi) \\ &\quad + i a^\dagger \dot{a} - A \partial_r a^\dagger \cdot \partial_r a - K a^\dagger a] d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (16)$$

进一步地, 假设磁子呈现波包的形式, 并且假设其波型在经过斯格明子时近似不变, 进而可以对磁子波包应用集体坐标理论<sup>[38,39]</sup>. 在该近似下, 自旋波波函数对时间的偏导转变为  $\partial_t \psi = \partial_r \psi \cdot \mathbf{v}$ , 其中  $\mathbf{v} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$  为磁子群速度, 这一近似在描述斯格明子和畴壁的动力学中被广泛使用<sup>[40,41]</sup>. 通过这一假设可以进一步简单地将体系的拉氏量写作波包的位置和动量的函数<sup>[38]</sup>:

$$\mathcal{L}_2 = 2a^\dagger a \int \left[ \mathbf{v} \cdot \left( \mathbf{k} - \mathbf{A}_{12} + \frac{D\mathbf{S}_0}{2J} \right) - A k^2 \right] d\mathbf{r}, \quad (17)$$

其中,  $\omega$  为磁子频率,  $\mathbf{S}_0$  为自旋平衡态,  $\mathbf{A}_{12} = -\nabla\phi \cos\theta$  代表来自交换能的有效矢势. 值得注意的是磁子的产生湮灭算符通常和磁子在某个态下的占据数有关, 而拉氏量中的  $a^\dagger a$  就对应着磁子的粒子数. 本文认为磁子的粒子数和自旋波振幅的平方相关. 随后对体系拉氏量应用欧拉-拉格朗日方程, 可以得到如下的动力学方程:

$$a^\dagger a m_{\text{sw}} \dot{\mathbf{v}} - a^\dagger a \omega \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0, \quad (18)$$

式中,  $m_{\text{sw}} = 1/2A$  代表归一化的磁子波包有效质量. 方程 (18) 表明磁子在经过斯格明子时会经历来自交换能和 DM 相互作用诱导的虚拟磁场  $\mathbf{B} = B_z \mathbf{e}_z$  的作用, 其中

$$B_z = \frac{\hbar}{e} \left[ \nabla \times \left( \mathbf{A}_{12} + \frac{D\mathbf{S}_0}{2J} \right) \right]_z \\ = \frac{\hbar}{e} \left[ \mathbf{S}_0 \cdot (\partial_x \mathbf{S}_0 \times \partial_y \mathbf{S}_0) + \left( \nabla \times \frac{D\mathbf{S}_0}{2J} \right)_z \right].$$

通常来讲, 由交换能诱导的虚拟磁场的总磁通等于斯格明子的拓扑荷, 而 DM 相互作用诱导的虚拟磁场的总磁通近似为零<sup>[36]</sup>. 因此, 磁子的运动轨迹主要取决于磁织构的拓扑荷. 当拓扑荷不为零时, 磁子会经历一个斜散射 (skew scattering) 过程. 而当拓扑荷为零时, 磁子则会经历一个边跳跃 (side jump) 过程<sup>[38]</sup>, 这类似于电子被杂质散射后导致的反常霍尔效应, 如图 6(a) 所示.

在反铁磁或者亚铁磁中, 由于体系具有相反自旋的两套子晶格, 使得磁子的极化会拥有全自旋自由度. 因此, 磁子会经历所谓的拓扑磁子自旋霍尔效

应, 即具有相反极化的磁子流经历自旋依赖的相反的有效洛伦兹力, 继而被斯格明子分离<sup>[42-45]</sup>, 如图 6(b) 和图 6(c) 所示.

### 3.2 散射理论

3.1 节的虚拟电磁场理论适用于斯格明子尺寸大于磁子波长的情况, 并且忽略了一些粒子数不守恒的项, 如  $a^\dagger a^\dagger$  和  $aa$  等. 当磁子的波长大于斯格明子直径时, 可以采用散射理论去处理该情况下的磁子-斯格明子散射行为. 该方法最早于 2014 年由 Iwasaki 等<sup>[46]</sup> 用于研究磁子和斯格明子的耦合体系. 同年由 Schütte 等<sup>[47]</sup> 完成了更系统的研究. 考虑包含交换能、体 DM 相互作用和塞曼能的系统的哈密顿量为

$$\mathcal{H} = \frac{A}{2} (\nabla \mathbf{S})^2 + D \mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{S}) - h S_z. \quad (19)$$

为了描述磁子, 可以使用由 3 个相互正交的单位向量 ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ) 定义的局域坐标系, 其中  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{S}_0/|\mathbf{S}_0| = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{S}_0$  代表自旋的平衡态. 相应的

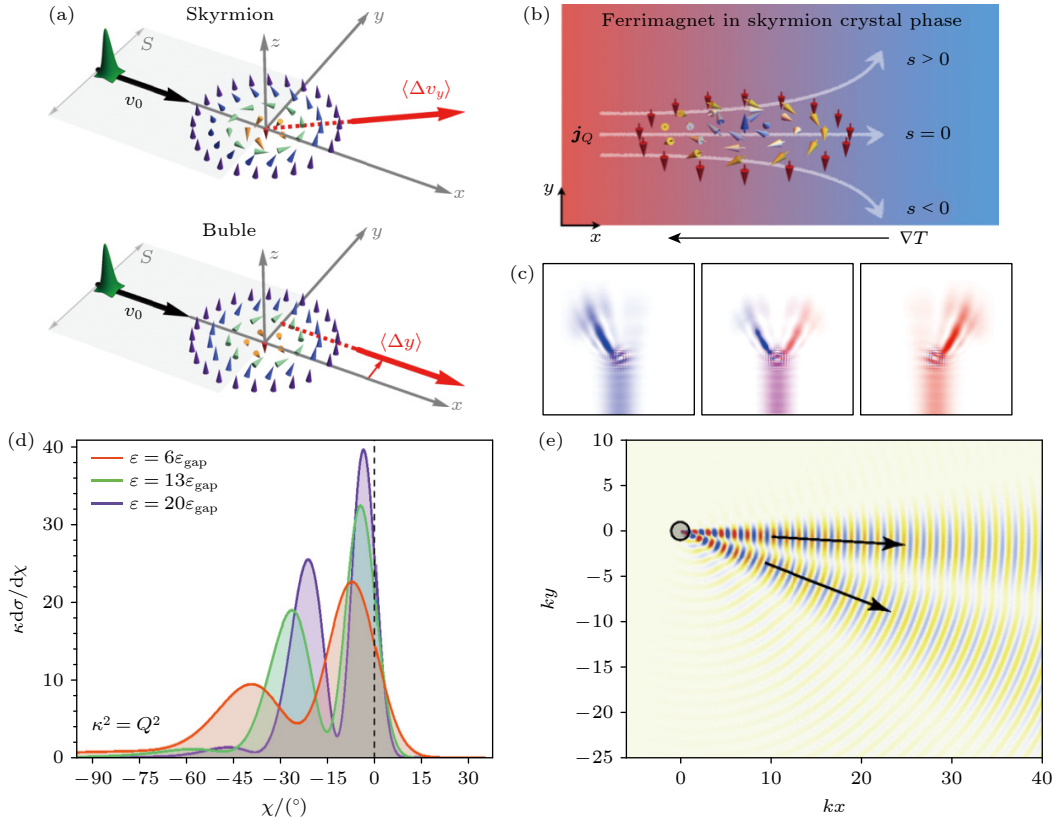


图 6 (a) 磁子经过磁织构之后的斜散射和边跳跃行为<sup>[38]</sup>; 磁子经过 (b) 亚铁磁和 (c) 反铁磁斯格明子之后的偏转轨迹<sup>[42,43]</sup>; (d) 散射理论计算得到的不同入射磁子能量下的微分散射截面,  $\varepsilon_{\text{gap}}$  为  $\mathbf{k} = 0$  时的磁子能量<sup>[47]</sup>; (e) 磁子的彩虹散射过程<sup>[47]</sup>

Fig. 6. (a) Skew scattering and side jump of spin wave across magnetic texture<sup>[38]</sup>; the trajectories of spin wave across (b) antiferromagnetic and (c) ferrimagnetic skyrmion<sup>[42,43]</sup>; (d) differential cross section evaluated from scattering theory for various energies,  $\varepsilon_{\text{gap}}$  is the magnon gap<sup>[47]</sup> at  $\mathbf{k} = 0$ ; (e) the rainbow scattering process of magnons<sup>[47]</sup>.



磁子波函数为  $\psi = (\delta_1 \pm i\delta_2)/\sqrt{2}$ , 其中  $\delta_{1(2)}$  描述了自旋波在两个正交方向的振幅分量. 将自旋哈密顿量表达为磁子波函数的函数, 并保留其二阶微扰部分, 可以得到相应的本征方程:

$$H(m)\psi = \varepsilon\tau^z\psi, \quad (20)$$

式中,  $m$  代表散射磁子携带的轨道角动量, 哈密顿量  $H(m) = H_0(m) + V(m)$ ,  $H_0(m)$  和  $V(m)$  分别为不存在斯格明子时系统的哈密顿量和斯格明子带来的有效散射势, 分别表示为

$$H_0(m) = A \left[ \mathbf{I} \left( -\partial_\rho^2 - \frac{\partial_\rho}{\rho} + \frac{m^2+1}{\rho^2} + \frac{h}{A} \right) - \tau^z \frac{2m}{\rho^2} \right], \quad (21)$$

$$V(m) = A[v_z\tau^z + v_0\mathbf{I} + v_x\tau^x],$$

$$v_z = -2m \left( \frac{\cos\theta - 1}{\rho^2} - \frac{D\sin\theta}{A\rho} \right),$$

$$v_0 = \frac{3[\cos(2\theta) - 1]}{4\rho^2} - \frac{3D\sin(2\theta)}{2A\rho} + \frac{h(\cos\theta - 1)}{A} - \frac{D\theta'}{A} - \frac{\theta'^2}{2},$$

$$v_x = \frac{\sin^2(\theta)}{2\rho^2} + \frac{D}{A\sin(2\theta)}2\rho - \frac{D\theta'}{A} - \frac{\theta'^2}{2}, \quad (22)$$

式中,  $\tau^{x(z)}$  代表泡利矩阵,  $\mathbf{I}$  代表单位矩阵,  $\rho$  为自旋和斯格明子中心的距离. 在没有斯格明子的情况下, 方程 (22) 的本征值和波函数分别为  $\varepsilon = A\left(\frac{h}{A} + k^2\right)$ ,  $\psi_{m,0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{Aa}} J_{m-1}(k\rho)$ , 本征函数中的  $J_m$  为贝塞尔函数,  $a$  为体系晶格参数. 对应的本征值代表了基态情况下铁磁磁子的色散关系. 在能散射的情况下 (磁子频率较高的情况), 非对角元的散射矩阵可以忽略 ( $v_x$ ), 可以只考虑  $v_z$  和  $v_0$  带来的影响. 而在非高能散射的情况下 (磁子频率较低的情况), 由于斯格明子势是空间依赖的, 则需要对实空间上每个位置的本征方程进行对角化, 求得对应的本征值和波函数. 在远离斯格明子的区域, 磁子的波函数可以写为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left[ e^{ik \cdot r} + f(\chi) \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{\rho}} \right], \quad (23)$$

其中,  $\chi$  为斯格明子所在平面的方位角,  $f(\chi)$  代表方向依赖的磁子的散射强度, 通常由无穷远处散射波的相移决定. 采用半经典的散射理论可以计算  $f(\chi)$  以及对应的微分散射截面和散射角的依赖性<sup>[48]</sup>, 如图 6(d) 所示. 显而易见, 相对于磁子入射方向 ( $\chi = 0$ ), 微分散射截面具有很强的非对称性, 代表

着明显的偏向散射过程. 通过计算该体系波函数在实空间的分布, 可以明显看到磁子经过斯格明子之后的多峰散射过程, 即彩虹散射过程 (rainbow scattering), 如图 6(e) 所示.

### 3.3 磁子的朗道能级

当在二维电子气中施加外磁场时, 会出现分立的量子化能级, 称为朗道能级 (Landau level). 与之对应的, 磁子在经过由斯格明子诱导的虚拟磁场时, 也可能出现对应的磁子朗道能级. Kim 等<sup>[43]</sup> 考虑磁子在斯格明子晶体中的情况, 并将斯格明子诱导的虚拟磁场做一个空间平均化处理. 此时, 在斯格明子体系中的磁子可由如下薛定谔方程描述:

$$i\hbar\partial_t\psi = \left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A}_{12} \right)^2 \right] \psi, \quad (24)$$

其中  $q$  对应磁子的手性, 类比为磁子的有效电荷. 有效磁场  $\mathbf{B} = B_z\mathbf{e}_z = \int \frac{\hbar}{e} [\nabla \times (\mathbf{A}_{12})]_z d\mathbf{r} / V \mathbf{e}_z$  可以近似为斯格明子拓扑荷对空间的平均, 其中  $V$  是系统的体积. 相应的磁子回旋频率为  $\omega_c = B_z/m$ , 其本征值给出磁子体系中的朗道能级  $\varepsilon_n = \hbar\omega_c(n + 1/2)$ ,  $n$  为整数.

## 4 磁子的非线性霍尔效应

前两节的磁子霍尔效应和拓扑霍尔效应都对应着霍尔磁子流对外界激励的线性响应. 2015 年, Sodemann 和 Fu<sup>[49]</sup> 在理论上首次预测了存在于时间反演对称性体系中的霍尔电流, 该电流与外界电场有二阶响应关系. 由于这种非线性响应, 他们将其命名为非线性霍尔效应. 为了求得非线性霍尔电流的表达式, 可从霍尔电流的密度  $j_a = -e \int_k f(k) v_a dk$  出发, 其中  $f(k)$  为电子分布函数,  $v_a$  为电子速度. 分布函数  $f(k)$  可以通过级数展开至电场的二阶项:

$$f = \text{Re}\{f_0 + f_1 + f_2\}, \quad (25)$$

其中,  $f_0$  是没有外场下的电子分布函数,  $f_1$  和  $f_2$  为

$$f_1 = f_1^\omega e^{i\omega t}, \quad f_1^\omega = \frac{e\tau\varepsilon_a\partial_a f_0}{1 + i\omega\tau},$$

$$f_2 = f_2^0 + f_2^{2\omega} e^{2i\omega t}, \quad f_2^0 = \frac{(e\tau)^2 \varepsilon_a^* \varepsilon_b \partial_{ab} f_0}{2(1 + i\omega\tau)},$$

$$f_2^{2\omega} = \frac{(e\tau)^2 \varepsilon_a \varepsilon_b \partial_{ab} f_0}{2(1 + i\omega\tau)(1 + 2i\omega\tau)}, \quad (26)$$



式中,  $\tau$  为电子的弛豫时间. 相应地, 可以得到保留到电场二阶项的霍尔电流  $j_a = \text{Re}(j_a^0 + j_a^{2\omega} e^{2i\omega t})$ , 其中,

$$j_a^0 = \frac{e^2}{2} \int_k \varepsilon_{abc} \Omega_b \varepsilon_c^* f_1^\omega \mathbf{dk} - e \int_k f_2^0 \partial_a \varepsilon(k) \mathbf{dk},$$

$$j_a^{2\omega} = \frac{e^2}{2} \int_k \varepsilon_{abc} \Omega_b \varepsilon_c f_1^\omega \mathbf{dk} - e \int_k f_2^{2\omega} \partial_a \varepsilon(k) \mathbf{dk}. \quad (27)$$

(27) 式中的第二项是完全和贝里曲率无关的项, 当考虑时间反演对称的体系时, 该项也会消失. 因此可以着重于与拓扑相关的第一项, 将霍尔电流重写为  $j_a^0 = \chi_{abc} \varepsilon_b \varepsilon_c^*$  以及  $j_a^{2\omega} = \chi_{abc} \varepsilon_b \varepsilon_c$ , 其中

$$\chi = -\varepsilon_{abc} \frac{e^3 \tau}{2(1 + i\omega\tau)} \int_k f_0(\partial_b \Omega_d) \mathbf{dk}.$$

显而易见, 在存在时间反演对称性的体系中, 电子的霍尔电流由贝里曲率偶极子  $\int_k f_0(\partial_b \Omega_d) \mathbf{dk}$  决定. 图 7(a) 给出了由贝里曲率诱导的反常霍尔效应和贝里曲率偶极子诱导的非线性霍尔效应<sup>[50]</sup>.

相应地, 类似的处理方法可以映射到磁子体系. 以由温度梯度诱导的反常能斯特效应为例, 其对应的霍尔磁子流的表达式为

$$J_y = -\frac{1}{\hbar V} \sum_{n, \mathbf{k}} \Omega_n(\mathbf{k}) \int d\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \rho[E_n(\mathbf{k}) + \varepsilon, T(x)], \quad (28)$$

其中  $E_n(\mathbf{k})$ ,  $\Omega_n(\mathbf{k})$ ,  $\rho(E, T(x))$  分别代表能量本征值、第  $n$  条能带的贝里曲率和能量为  $E$  的磁子在温度  $T$  下的分布函数,  $T(x) = T_0 - x \nabla T$  是随空间变化的温度分布. 为了获得和温度梯度呈现非线性关系的贝里曲率, 可从体系的玻尔兹曼输运方程出发:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \right) \rho[E_n(\mathbf{k}) + \varepsilon, T(x)] = -\frac{\rho[E_n(\mathbf{k}) + \varepsilon, T(x)] - \rho_0[E_n(\mathbf{k}) + \varepsilon, T(x)]}{\tau}, \quad (29)$$

其中,  $\tau$  和  $\rho_0$  分别代表磁子的弛豫时间和平衡分布函数. 考虑这是一个没有外场的稳态系统, 上述方程可以进一步约化为

$$\rho[E_n(\mathbf{k}) + \varepsilon, T(x)] = \rho_0[E_n(\mathbf{k}) + \varepsilon, T(x)] - \tau \dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \rho[E_n(\mathbf{k}) + \varepsilon, T(x)]. \quad (30)$$

将  $\dot{\mathbf{x}}$  重写为  $(1/\hbar) \partial_{\mathbf{k}_x} E_n(\mathbf{k})$ ,  $\partial/\partial x$  重写为  $-\nabla T \partial/\partial T_0$ , 并将 (29) 式代入磁子流的表达式, 可

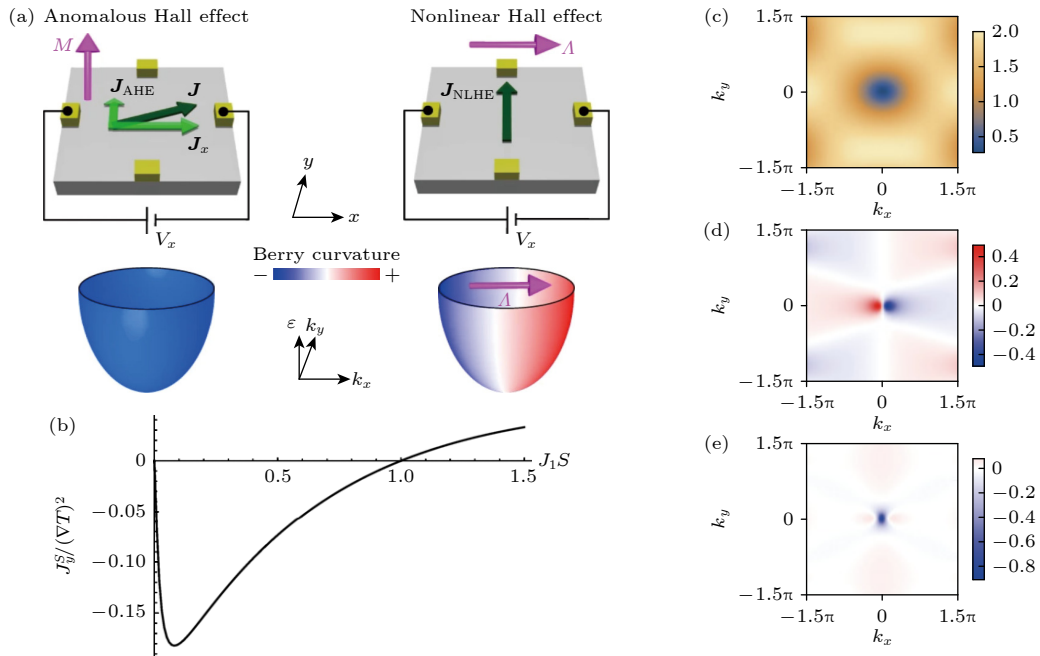


图 7 (a) 由贝里曲率诱导的反常霍尔效应和贝里曲率偶极子诱导的非线性霍尔效应示意图<sup>[50]</sup>. (b) 非线性磁子流和交换系数  $J_1$  的关系<sup>[51]</sup>. 磁子的 (c) 能带、(d) 贝里曲率和 (e) 贝里曲率偶极子在动量空间的分布<sup>[51]</sup>

Fig. 7. (a) Schematics of the anomalous Hall effect induced by the finite Berry curvature and the nonlinear Hall effect induced by the finite Berry curvature dipoles in the entire space, respectively<sup>[50]</sup>. (b) Nonlinear magnon current as a function of exchange constant  $J_1$  <sup>[51]</sup>. Distribution of (c) the band structure, (d) berry curvature, and (e) berry curvature dipole of magnons in the momentum space<sup>[51]</sup>.

以得到与温度梯度呈现二阶响应的磁子流表达式:

$$J_y = \frac{\nabla T}{\hbar V} \sum_n \int_{\text{BZ}} d^2 k c_1 \{ \rho_0 [E_n(k), T_0] \} \Omega_n(k) + \frac{\tau (\nabla T)^2}{\hbar^2 V T_0} \sum_n \int_{\text{BZ}} d^2 k c_1 \{ \rho_0 [E_n(k), T_0] \} \times \frac{\partial}{\partial k_x} [E_n(k) \Omega(k)], \quad (31)$$

其中,  $c_1(\rho_0) = (1 + \rho_0) \ln(1 + \rho_0) - \rho_0 \ln(\rho_0)$ , 方程 (30) 的第一项对应线性磁子的能斯特效应; 第二项则代表磁子流对温度梯度的非线性响应 (二阶), 其和磁子的贝里曲率偶极子相关联. 如果考虑方程更高的阶数, 可以得到磁子流对温度梯度的三阶、四阶响应. 图 7(b) 给出了反铁磁蜂巢晶格中的非线性磁子流和交换系数的关系 [51]. 非线性磁子流由其在  $\mathbf{k}$  空间的能带分布 (图 7(c))、贝里曲率 (图 7(d)) 和贝里曲率偶极子 (图 7(e)) 决定 [51].

## 5 磁子非线性拓扑自旋霍尔效应

当自旋波的激发振幅较大时, 线性化方程已不足以描述磁子行为, 需要讨论自旋波高阶相互作用项的影响. 这些非线性高阶项通常表述为磁子-磁子散射过程 (magnon-magnon scattering). 其中最常见非线性过程是三磁子和四磁子散射过程. 三磁子散射包括三磁子融合和三磁子分裂两种类型,

一般情况下是由磁偶极相互作用或者非共线磁织构诱导 [52]. 三磁子融合是指两个磁子融合为一个磁子, 其逆过程为三磁子分裂, 对应一个磁子分裂为两个磁子 (图 8(a)), 三磁子过程可以用于产生磁子频率梳 [53,54], 如图 8(b) 所示. 四磁子散射主要是指两个磁子转变为另外两个磁子 [55], 主要由交换相互作用诱导产生, 如图 8(c) 所示. 需要指出的是, 磁子作为玻色子, 在磁子-磁子散射过程中粒子数可以不守恒, 但需要遵循能量和动量守恒.

在光学体系中, 非线性光在传输过程中和线性光一样会获得贝里相位 [56-58]. 而在磁子体系中, 非线性磁子也同样可能会经历由非共线磁织构导致的虚拟磁场. 最近, Jin 等 [59] 系统研究了由于三磁子过程诱导的磁子非线性拓扑霍尔效应, 揭示了非线性磁子在经过斯格明子时会感受到额外的规范场, 继而具有更大的霍尔角, 如图 9(a) 所示. 具体来说, 该工作考虑了在反铁磁系统中入射磁子和斯格明子呼吸模之间的相互作用, 并以此来诱导三磁子过程, 产生磁子频率梳. 为了考虑哈密顿量中不同磁子模式的贡献, 将玻色算子展开为  $a = a_s e^{i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}} + a_p e^{i\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r}} + a_q e^{i\mathbf{k}_q \cdot \mathbf{r}} + a_r \psi_r$ , 其中  $\mathbf{k}_s$ ,  $\mathbf{k}_p$  和  $\mathbf{k}_q$  分别为入射模  $a_s$ 、合频模  $a_p$  和差频模  $a_q$  在无穷远处的波矢,  $\psi_r$  为呼吸模  $a_r$  的波函数. 相应的哈密顿量为 (考虑归一化的自旋矢量  $S = 1$ )  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3$ . 其中代表磁子线性过程的二阶哈密顿量为

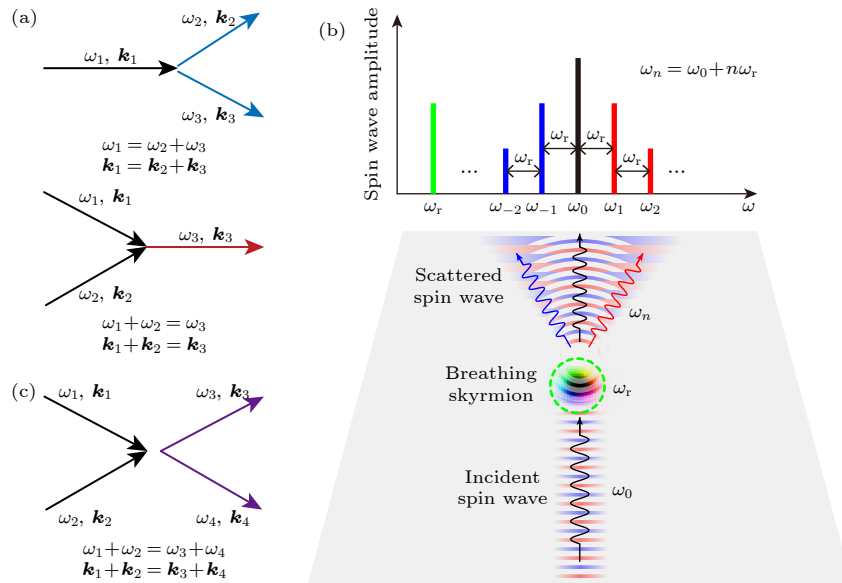


图 8 (a) 非线性三磁子过程示意图; (b) 三磁子散射诱导的磁子频率梳示意图 [53]; (c) 非线性四磁子过程示意图

Fig. 8. (a) Schematic diagram of the nonlinear three-magnon process; (b) schematic diagram of three-magnon scattering induced magnon frequency comb [53]; (c) schematic diagram of the nonlinear four-magnon process.

$$\mathcal{H}_2 = \sum_{i=s,p,q} 2a_i^\dagger a_i \int \left[ \frac{1}{J} \omega_i^2 \mathbf{v}_i^2 - \left( 2\mathbf{A}_{12} + \frac{D\mathbf{l}_0}{J} \right) \cdot \omega_i \mathbf{v}_i \right] d\mathbf{r}. \quad (32)$$

哈密顿量中的  $\mathbf{l}_0$  为平衡态下反铁磁体系的奈尔矢量. 而代表非线性过程的三阶哈密顿量为  $\mathcal{H}_3 = \mathcal{H}_{3s} + \mathcal{H}_{3p} + \mathcal{H}_{3q}$ , 其中  $\mathcal{H}_{3s}$ ,  $\mathcal{H}_{3p}$  和  $\mathcal{H}_{3q}$  分别表示入射、融合和分裂磁子模所贡献的哈密顿量, 具体表达式为

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{3s} &= \int \omega_s \mathbf{v}_s \cdot \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (i\mathbf{A}_{13} + \mathbf{A}_{23}) + \frac{D}{2J} (i\mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_\theta) \right] \left[ 3a_q a_r a_s^\dagger e^{i(-\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_q) \cdot \mathbf{r}} + a_p^\dagger a_r a_s e^{i(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_p) \cdot \mathbf{r}} \right] \psi_r + \text{H.c.} \right\} d\mathbf{r}, \\ \mathcal{H}_{3p} &= \int \omega_p \mathbf{v}_p \cdot \left\{ -\frac{3}{\sqrt{2}} \left[ (i\mathbf{A}_{13} + \mathbf{A}_{23}) + \frac{D}{2J} (i\mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_\theta) \right] a_s a_r a_p^\dagger e^{i(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_p) \cdot \mathbf{r}} \psi_r + \text{H.c.} \right\} d\mathbf{r}, \\ \mathcal{H}_{3q} &= \int \omega_q \mathbf{v}_q \cdot \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (i\mathbf{A}_{13} + \mathbf{A}_{23}) + \frac{D}{2J} (i\mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_\theta) \right] a_s a_r^\dagger a_q^\dagger e^{i(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_q) \cdot \mathbf{r}} \psi_r^* + \text{H.c.} \right\} d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (33)$$

其中,  $\mathbf{A}_{\nu\nu'} = \mathcal{A}_{x,\nu\nu'} \mathbf{e}_x + \mathcal{A}_{y,\nu\nu'} \mathbf{e}_y$  代表由局域坐标变换带来的规范场 ( $\nu, \nu' = 1, 2, 3$ );  $\mathbf{e}_\theta$  和  $\mathbf{e}_\phi$  为极坐标系中的两个单位矢量; 而  $\omega_s$ ,  $\omega_p$ ,  $\omega_q$  和  $\omega_r$  是入射模、融合模、分裂模和斯格明子呼吸模的频率, 并且符合能量守恒  $\omega_{p(q)} = \omega_s \pm \omega_r$ . 显而易见, 传统的规范场  $\mathbf{A}_{12}$  只出现在二阶哈密顿量中, 而规范场  $\mathbf{A}_{13}$  和  $\mathbf{A}_{23}$  则出现在磁子的非线性过程中. 对体系的总拉氏量运用欧拉-拉格朗日方法, 可以得到不同模式波包的运动方程:

$$a_i^\dagger a_i \frac{\hbar \omega_i^2}{eJ} \dot{\mathbf{v}}_i - a_i^\dagger a_i \omega_i \mathbf{v}_i \times \mathbf{B} - \mathbf{F}_i^{\text{nl}} = 0, \quad i = s, p, q, \quad (34)$$

其中  $\mathbf{B}$  与方程 (17) 中的虚拟磁场等价, 是导致传统磁子霍尔效应的虚拟磁场. 这里  $\hbar$  和  $e$  是约化普朗克常数和单位电荷, 而  $\mathbf{F}_i^{\text{nl}}$  代表来自于三磁子非线性过程的额外的有效洛伦兹力:

$$\mathbf{F}_i^{\text{nl}} = c_i \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}', \quad i = s, p, q, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}' &= B'_z \mathbf{e}_z, \\ B'_z &= \frac{\hbar}{e} (\nabla \times \mathbf{A}_{23})_z + \frac{\hbar D}{2Je} (\nabla \times \mathbf{e}_\theta)_z \\ &= \frac{\hbar}{e} \left[ \partial_y l_0 \cdot \partial_x \left( \mathbf{n} \times \frac{\mathbf{e}_z}{\sin \theta} \right) - \partial_x l_0 \cdot \partial_y \left( \mathbf{n} \times \frac{\mathbf{e}_z}{\sin \theta} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\hbar D}{2Je} \left( \nabla \times \frac{\mathbf{e}_z + \cos \theta \mathbf{l}_0}{\sin \theta} \right)_z \end{aligned}$$

代表来自于三磁子过程贡献的额外虚拟磁场. 由于斯格明子的旋转对称性, 矢势  $\mathbf{A}_{13}$  的贡献为零. 这里

$$\begin{aligned} c_s &= (\omega_s/4) (g_p a_p^\dagger a_r a_s + 3g_q a_q^\dagger a_r^\dagger a_s + \text{H.c.}), \\ c_p &= (3\omega_p/4) (g_p a_s a_r a_p^\dagger + \text{H.c.}), \\ c_q &= (\omega_q/4) (g_q a_s a_r^\dagger a_q^\dagger + \text{H.c.}), \\ g_p &= \frac{1}{\sqrt{2SV}} \int e^{i(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_p) \cdot \mathbf{r}} \psi_r d\mathbf{r}, \\ g_q &= \frac{1}{\sqrt{2SV}} \int e^{i(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_q) \cdot \mathbf{r}} \psi_r^* d\mathbf{r}, \end{aligned}$$

代表了磁子的重叠积分, 其中  $V$  是系统的体积. 在整个磁子和斯格明子的散射过程中, 自旋波波包可以看作是在虚拟磁场  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{B}'$  下运动的点粒子. 进一步考虑 4 种磁子模式之间的关系:

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{g}{\varepsilon + i\alpha(\omega_s + \omega_r)} a_s a_r, \\ a_q &= \frac{g}{\varepsilon - i\alpha(\omega_s - \omega_r)} a_s a_r^\dagger, \end{aligned} \quad (36)$$

可以将方程 (33) 转变为

$$m_{\text{sw},i} \dot{\mathbf{v}}_i - e \mathbf{v}_i \times \sigma (\mathbf{B} + \lambda_i \mathbf{B}') = 0, \quad i = s, p, q. \quad (37)$$

这里,  $m_{\text{sw},i} = \hbar \omega_i / J$  为反铁磁中自旋波波包的有效质量,  $\sigma = \mp 1$  表示左右旋磁子,  $e$  为元电荷,  $\lambda_s = n_r \left( \frac{gg_p}{4\varepsilon} + \frac{3gg_q}{4\varepsilon} + \text{H.c.} \right)$ ,  $\lambda_p = \frac{3}{4} \left( \frac{\varepsilon g_p}{g} + \text{H.c.} \right)$ ,  $\lambda_q = \frac{1}{4} \left( \frac{\varepsilon g_q}{g} + \text{H.c.} \right)$ , 其中  $n_r = \langle a_r^\dagger a_r \rangle$  为斯格明子呼吸模的粒子数,  $g$  为三磁子耦合强度,  $\varepsilon = \omega - \omega_r$ . 图 9(b) 给出了虚拟磁场  $B_z/B_0$  和  $B'_z/B_0$  的空间分布, 其中  $B_0 = \hbar/a^2 e$ ,  $a$  是体系的晶格参数. 可以看出它们的大小在同样的数量级. 通过数值求解方程 (35) 在  $\mathbf{B}' = 0$  和  $\mathbf{B}' \neq 0$  的情况, 可以得到对应的磁子运动轨迹 (图 9(b)). 显而易见, 三磁子过程诱导的虚拟磁场会诱导更大的磁子霍尔角. 进一步, 微磁学模拟也论证了上述的理论分析, 即相较于入射波模式, 差频和合频模式具有更为显著的磁子霍尔角, 如图 9(c) 所示. 值得注意的是, 随着非线性阶数  $m$  的增加, 磁子的霍尔角也几乎呈现线性增加的趋势, 如图 9(d) 所示. 这一过程可以类比为光经过大气层之后经历的多次折射现象.

在该体系中, 散射磁子流和入射磁子流之间存在非线性响应. 具体来说, 当磁子经过斯格明子时, 通过三磁子过程激发出斯格明子的呼吸模式. 随后入射磁子和斯格明子呼吸模耦合产生融合与

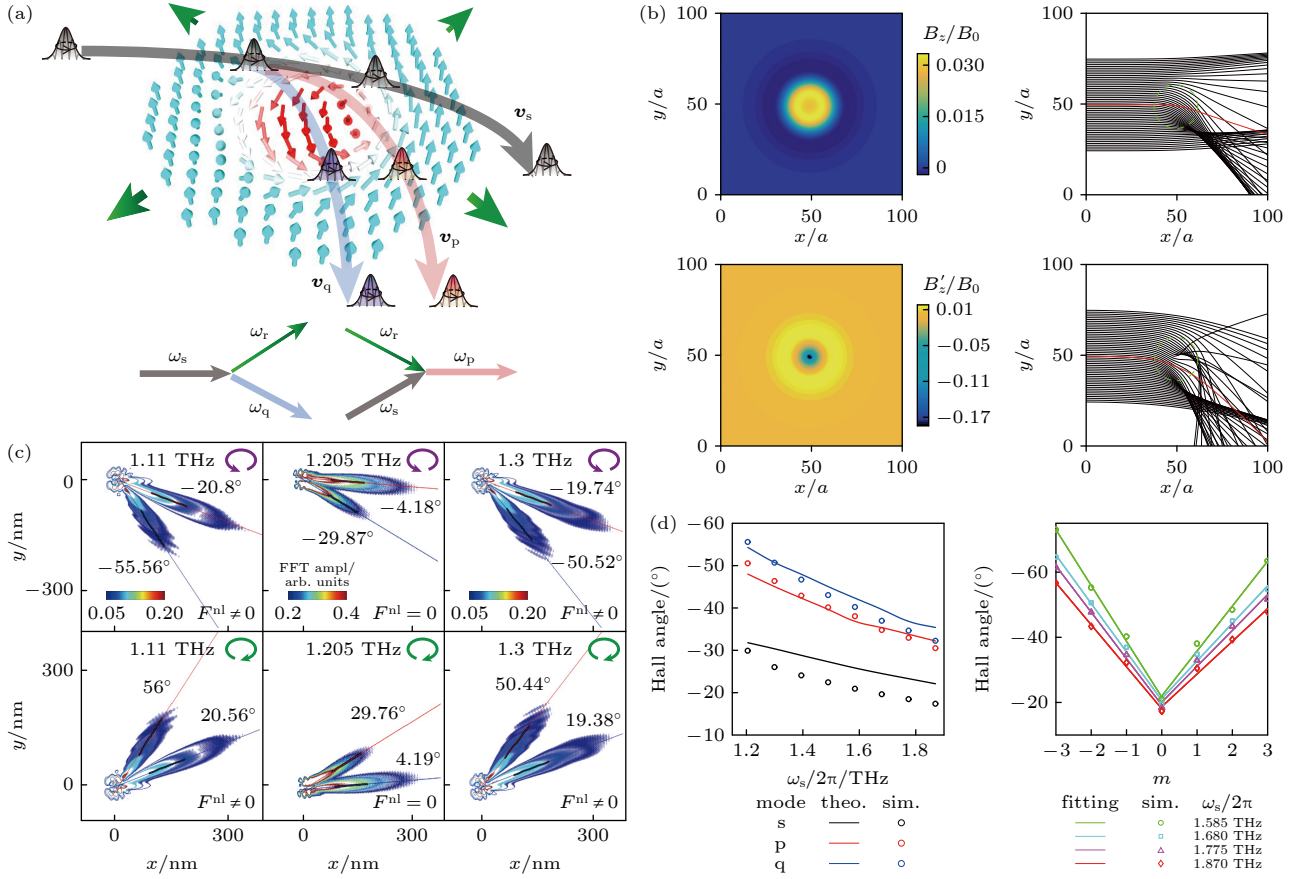


图 9 (a) 磁子非线性拓扑自旋霍尔效应示意图; (b) 虚拟磁场  $B$  和  $B'$  的空间分布以及对应磁子的运动轨迹 (分别在  $B$  和  $B+B'$  作用下); (c) 不同磁子模式的波函数的等值线分布; (d) 线性非线性霍尔角和入射磁子频率  $\omega_s$  以及非线性阶数  $m$  的关系<sup>[50]</sup>

Fig. 9. (a) Schematic illustration of the nonlinear topological magnon spin Hall effect in magnon-AFM skyrmion scattering; (b) spatial distribution of dimensionless field  $B$  and  $B'$  as well as the corresponding spin wave trajectories in real space; (c) isoline maps for different magnon modes; (d) the Hall angle as a function of the incident magnon frequency  $\omega_s$  and mode index  $m$ <sup>[50]</sup>.

分裂模. 假设呼吸模的磁子数正比于入射波的磁子数即  $a_r = ca_s$ , 根据方程 (35), 相应的融合和分裂模式的磁子数可以表示为

$$n_p = \frac{(cg)^2}{\varepsilon^2 + \alpha^2(\omega_s + \omega_r)^2} n_s^2, \quad n_q = \frac{(cg)^2}{\varepsilon^2 + \alpha^2(\omega_s - \omega_r)^2} n_s^2, \quad (38)$$

其中  $n_s$ ,  $n_p$  和  $n_q$  分别代表入射磁子、融合和分裂模式磁子的磁子数. 显而易见, 其散射磁子数和入射磁子数确实呈现非线性的关系. 这种全新的非线性霍尔效应起源于四点. 1) 玻色子粒子数不守恒的内禀性质: 单个磁子可以分裂为多个磁子, 也可以与其他磁子合并成一个磁子, 这在低能费米子体系中没有对应. 2) 非线性三磁子散射形成的磁子频率梳: 频域上一串离散的具有相同频率间隔的自旋波谱线. 3) 隐藏的规范场: 分析表明剩下的两个规范场矩阵元出现在磁组织的非线性磁子输运中,

它们作用在磁子频率梳上, 产生巨大的磁子霍尔角. 4) 反铁磁磁子具有的两种自旋态: 分别对应右旋和左旋的磁矩进动模式.

## 6 总结与展望

本文回顾了磁子霍尔效应最新的研究进展. 以电子霍尔效应为起点, 介绍了由能带拓扑和实空间拓扑引起的磁子霍尔效应和磁子拓扑霍尔效应. 进一步地, 考虑磁子流对外界刺激的二阶响应, 可以得到由贝里曲率偶极子诱导的磁子非线性霍尔效应. 而这一非线性效应也可以推广到由实空间磁组织引起的拓扑霍尔效应当中, 导致磁子非线性拓扑自旋霍尔效应. 值得指出的是, 近年来, 磁子霍尔效应家族正在不断发展壮大. 除了本文主要介绍的霍尔效应外, 还包括磁子能斯特效应和磁子塞贝克效应等<sup>[60,61]</sup>. 隐藏在磁子传输过程中更多新奇的物理效应值得进一步挖掘. 具体来说, 斯格明子晶体



中磁子的朗道能级通常具有非零的陈数, 继而对磁子的霍尔效应产生贡献. 但是目前大部分基于磁子朗道能级的研究都局限于线性区域, 不涉及非线性效应. 单个斯格明子的存在破坏了体系的空间平移对称性, 而大量斯格明子构成的斯格明子周期结构(斯格明子晶体)能恢复这种对称性. 在磁子体系中, 三磁子相互作用所主导的非线性哈密顿量会对磁子能带引入厄密和非厄密的自能修正. 其中厄密的自能项会对磁子能带进行重整化而非厄密自能则会影响磁子能带的展宽<sup>[62]</sup>. 基于上述磁子非线性作用对倒空间拓扑可能带来的影响, 斯格明子晶体中隐藏在磁子-磁子相互作用中的规范场对磁子朗道能级的影响也值得进一步探索.

在真实材料中, 磁子-声子散射通常是不可避免的, 其可以通过两种不同的方式去影响磁子. 首先, 声子激发造成的晶格畸变可能会影响磁矩之间交换作用的大小和各向异性. 其次, 晶格振动可能会产生显著的磁子-声子耦合形成磁子极化子, 并在耦合体系的能谱中形成反交叉. 在磁性绝缘体中, 由温度梯度形成的热霍尔流可以由磁子或声子单独携带, 也可以由新的准粒子-磁子极化子携带<sup>[63]</sup>. 具体来说, 当磁化方向上的镜像对称性被破坏时, 自旋-晶格相互作用将会引起热霍尔效应, 并且热霍尔电导率由磁子和声子之间的耦合强度决定. 但是这种磁体系中的非本征霍尔效应都集中在磁子的线性输运过程中. 非本征磁子非线性霍尔效应的理论也值得进一步的发展和探索.

迄今为止, 磁子霍尔效应的研究对象大多局限于传统的铁磁或反铁磁材料体系. 近年来, 转角范德瓦耳斯层因为其中的拓扑平带具有诸多新奇拓扑物态现象, 包括非平凡超导体和 Mott 绝缘态等<sup>[64,65]</sup>而广受关注. 如在转角石墨烯中, 无序散射和贝里曲率偶极子均会诱导电子的非线性霍尔效应<sup>[66,67]</sup>. 而转角体系也会形成特殊的磁子拓扑保护态, 继而对磁子的霍尔效应产生影响<sup>[68]</sup>. 另外, 由于转角体系中的摩尔超晶格也存在斯格明子等拓扑磁结构, 其中的非线性磁子输运会受到倒空间和实空间拓扑的共同调制, 其背后的物理机制有待进一步探索和阐明. 此外, 也可以考虑偶极-偶极相互作用对非线性霍尔效应的影响, 探索线性霍尔磁子流和非线性磁子流对于翻转磁矩的作用, 利用非线性霍尔磁子流的巨大霍尔角设计相关的磁子学器件, 挖掘在不同对称性磁体中磁子的非线性霍尔效应, 探索静

磁自旋波的拓扑霍尔效应等. 总之, 对磁子霍尔效应的研究为理解相关的基本物理概念和现象提供了新的视角. 可以断定, 对凝聚态物理和拓扑物理等领域中不同物理机制诱导的霍尔效应的研究以及相关应用的开拓方兴未艾, 有着诱人的前景.

## 参考文献

- [1] Žutić L, Fabian J, Sarma S D 2004 *Rev. Mod. Phys.* **76** 323
- [2] Lenk B, Ulrichs H, Garbs F, Mützenberger M 2011 *Phys. Rep.* **507** 107
- [3] Chumak A V, Vasyuchka V I, Serga A A, Hillebrands B 2015 *Nat. Phys.* **11** 453
- [4] Yuan H Y, Cao Y, Kamra A, Duine R A, Yan P 2022 *Phys. Rep.* **965** 1
- [5] Hall E H 1879 *Am. J. Math.* **2** 287
- [6] Nagaosa N, Sinova J, Onoda S, MacDonald A H, Ong N P 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 1539
- [7] Jungwirth T, Niu Q, MacDonald A H 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 207208
- [8] Liang T, Lin J, Gibson Q, Kushwaha S, Liu M, Wang W, Xiong H, Sobota J A, Hashimoto M, Kirchmann P S, Shen Z, Cava R J, Ong N P 2018 *Nat. Phys.* **14** 451
- [9] Tian Y, Ye L, Jin X 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 087206
- [10] Hirsch J E 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 1834
- [11] Sinova J, Culcer D, Niu Q, Sinitsyn N A, Jungwirth T, MacDonald A H 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 126603
- [12] Kato Y K, Myers R C, Niu Q, Gossard A C, Awschalom D D 2004 *Science* **306** 1910
- [13] Sinova J, Valenzuela S O, Wunderlich J, Back C H, Jungwirth T 2015 *Rev. Mod. Phys.* **87** 1213
- [14] Neubauer A, Pfleiderer C, Binz B, Rosch A, Ritz R, Niklowitz P G, Böni P 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 186602
- [15] Yin G, Liu Y, Barlas Y, Zang J, Lake R K 2015 *Phys. Rev. B* **92** 024411
- [16] Göbel B, Mook A, Henk J, Mertig I 2017 *Phys. Rev. B* **96** 060406
- [17] Akosa C A, Tretiakov O A, Tatara G, Manchon A 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 097204
- [18] Berry M V 1984 *Proc. R. Soc. A* **392** 45
- [19] Skyrme T H R 1962 *Nucl. Phys.* **31** 556
- [20] Mühlbauer S, Binz B, Jonietz F, Pfleiderer C, Rosch A, Neubauer A, Georgii R, Böni P 2009 *Science* **323** 915
- [21] Yu X Z, Onose Y, Kanazawa N, Park J H, Han J H, Matsui Y, Nagaosa N, Tokura Y 2010 *Nature* **465** 901
- [22] Heinze S, Bergmann K V, Menzel M, Brede J, Kubetzka A, Wiesendanger R, Bihlmayer G, Blügel S 2011 *Nat. Phys.* **7** 713
- [23] Sundaram G, Niu Q 1999 *Phys. Rev. B* **59** 14915
- [24] Matsumoto R, Murakami S 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 197202
- [25] Zhang L, Ren J, Wang J, Li B 2013 *Phys. Rev. B* **87** 144101
- [26] Dzyaloshinsky I 1958 *J. Phys. Chem. Solids* **4** 241
- [27] Moriya T 1960 *Phys. Rev.* **120** 91
- [28] Katsura H, Nagaosa N, Lee P A 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 066403
- [29] Onose Y, Ideue T, Katsura H, Shiomi Y, Nagaosa N, Tokura Y 2010 *Science* **329** 297
- [30] Ideue T, Onose Y, Katsura H, Shiomi Y, Ishiwata S, Nagaosa N, Tokura Y 2012 *Phys. Rev. B* **85** 134411
- [31] Shen K 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 077201

- [32] Yu H, Xiao J, Schultheiss H 2021 *Phys. Rep.* **905** 1
- [33] Li Z X, Cao Y, Yan P 2021 *Phys. Rep.* **915** 1
- [34] Murakami S, Okamoto A 2017 *J. Phys. Soc. Jpn.* **86** 011010
- [35] Serga A A, Chumak A V, Hillebrands B 2010 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **43** 264002
- [36] van Hoogdalem K A, Tserkovnyak Y, Loss D 2013 *Phys. Rev. B* **87** 024402
- [37] Holstein T, Primakoff H 1940 *Phys. Rev.* **58** 1098
- [38] Lan J, Xiao J 2021 *Phys. Rev. B* **103** 054428
- [39] Lan J, Yu W, Xiao J 2021 *Phys. Rev. B* **103** 214407
- [40] Thiele A A 1973 *Phys. Rev. Lett.* **30** 230
- [41] Iwasaki J, Mochizuki M, Nagaosa N 2013 *Nat. Commun.* **4** 1463
- [42] Daniels M W, Yu W, Cheng R, Xiao J, Xiao D 2019 *Phys. Rev. B* **99** 224433
- [43] Kim S K, Nakata K, Loss D, Tserkovnyak Y 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 057204
- [44] Jin Z, Meng C Y, Liu T T, Chen D Y, Fan Z, Zeng M, Lu X B, Gao X S, Qin M H, Liu J M 2021 *Phys. Rev. B* **104** 054419
- [45] Liu Y, Liu T T, Jin Z, Hou Z P, Chen D Y, Fan Z, Zeng M, Lu X B, Gao X S, Qin M H, Liu J M 2022 *Phys. Rev. B* **106** 064424
- [46] Iwasaki J, Beekman A J, Nagaosa N 2014 *Phys. Rev. B* **89** 064412
- [47] Schütte C, Garst M 2014 *Phys. Rev. B* **90** 094423
- [48] Berry M V, Mount K E 1972 *Rep. Progr. Phys.* **35** 315
- [49] Sodemann I, Fu L 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 216806
- [50] Ma Q, Xu S Y, Shen H, MacNeill D, Fatemi V, Chang T R, Valdivia A M M, Wu S, Du Z, Hsu C H, Fang S, Gibson Q D, Watanabe K, Taniguchi T, Cava R J, Kaxiras E, Lu H Z, Lin H, Fu L, Gedik N, Herrero P J 2019 *Nature* **565** 337
- [51] Kondo H, Akagi Y 2022 *Phys. Rev. Res.* **4** 013186
- [52] Schultheiss H, Janssens X, Kampen M V, Ciubotaru F, Hermsdoerfer S J, Obry B, Laraoui A, Serga A A, Lagae L, Slavin A N, Leven B, Hillebrands B 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 157202
- [53] Wang Z, Yuan H Y, Cao Y, Li Z, Duine R A, Yan P 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 037202
- [54] Wang Z, Yuan H Y, Cao Y, Yan P 2022 *Phys. Rev. Lett.* **129** 107203
- [55] Schultheiss H, Vogt K, Hillebrands B 2012 *Phys. Rev. B* **86** 054414
- [56] Tymchenko M, Gomez-Diaz J S, Lee J, Nookala N, Belkin M A, Alù A 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 207403
- [57] Li G, Chen S, Pholchai N, Reineke B, Wong P W H, Pun E Y B, Cheah K W, Zentgraf T, Zhang S 2015 *Nat. Mater.* **14** 607
- [58] Li Y, Yeshtarim O, Hurvitz I, Karnieli A, Fu S, Porat G, Arie A 2020 *Phys. Rev. A* **101** 033807
- [59] Jin Z, Yao X, Wang Z, Yuan H Y, Zeng Z, Wang W, Cao Y S, Yan P 2023 *Phys. Rev. Lett.* **131** 166704
- [60] Zyuzin V A, Kovalev A A 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 217203
- [61] Xiao J, Bauer G E W, Uchida K, Saitoh E, Maekawa S 2000 *Phys. Rev. B* **61** 214418
- [62] Mook A, Plekhanov K, Klinovaja J, Loss D 2021 *Phys. Rev. X* **11** 021061
- [63] Zhang X, Zhang Y, Okamoto S, Xiao D 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 167202
- [64] Cao Y, Fatemi V, Demir A, Fang S, Tomarken S, Luo J, Sanchez-Yamagishi J, Watanabe K, Taniguchi T, Kaxiras E, Ashoori R, Jarillo-Herrero P 2018 *Nature* **556** 80
- [65] Cao Y, Fatemi V, Fang S, Watanabe K, Taniguchi T, Kaxiras E, Jarillo-Herrero P 2018 *Nature* **556** 43
- [66] Duan J, Jian Y, Gao Y, Peng H, Zhong J, Feng Q, Mao J, Yao Y 2022 *Phys. Rev. Lett.* **129** 186801
- [67] Huang M, Wu Z, Zhang X, Feng X, Zhou Z, Wang S, Chen Y, Cheng C, Sun K, Meng Z Y, Wang N 2023 *Phys. Rev. Lett.* **131** 066301
- [68] Wang H, Madami M, Chen J, et al. 2023 *Phys. Rev. X* **13** 021016

SPECIAL TOPIC—Two-dimensional magnetism and topological spin physics •  
COVER ARTICLE**Magnon Hall effect<sup>\*</sup>**Jin Zhe-Jun-Yu    Zeng Zhao-Zhuo    Cao Yun-Shan    Yan Peng<sup>†</sup>*(State Key Laboratory of Electronic Thin Films and Integrated Devices, School of Physics, University of  
Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)*

( Received 29 September 2023; revised manuscript received 29 November 2023 )

**Abstract**

Hall effect is an ancient but highly potential subfield in condensed matter physics, and its origin can be traced back hundreds of years. In 1879, Hall made a momentous discovery that when a current-carrying conductor is placed in a magnetic field, the Lorentz force pushes its electrons to one side of the conductor. This intriguing phenomenon was dubbed Hall effect. Since then, a series of novel Hall effects have been discovered, including anomalous Hall effect, quantum Hall effect, spin Hall effect, topological Hall effect, and planar Hall effect. Notably, Hall effects play an important role in realizing the information transport, since it can realize the mutual conversion of current in different directions. In bosonic systems such as magnons, a series of magnon Hall effects have been found, jointly driving the development of the magnon-based spintronics. In this perspective, we review the researches of the Hall effect in magnonic system in recent years, and briefly introduce its modern semi-classical theories, including virtual electromagnetic field theory and scattering theory. Furthermore, we introduce the different magnon Hall effects and clarify the physics behind them. Finally, the prospect of magnon Hall effect is discussed.

**Keywords:** magnon, Hall effect, nonlinear Hall effect, spintronics**PACS:** 75.40.Gb, 75.78.-n, 75.78.Cd, 11.15.-q**DOI:** [10.7498/aps.73.20231589](https://doi.org/10.7498/aps.73.20231589)

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Key Research and Development Program of China (Grant No. 2022YFA1402802) and the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12074057, 12374103).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [yan@uestc.edu.cn](mailto:yan@uestc.edu.cn)

## 磁子霍尔效应

金哲珺雨 曾钊卓 曹云姗 严鹏

## Magnon Hall effect

Jin Zhe-Jun-Yu Zeng Zhao-Zhuo Cao Yun-Shan Yan Peng

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 73, 017501 (2024) DOI: 10.7498/aps.73.20231589

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231589>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

铁磁/非磁金属异质结中的拓扑霍尔效应

Topological Hall effect in ferromagnetic/non-ferromagnetic metals heterojunctions

物理学报. 2018, 67(13): 131202 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180369>

高超声速磁流体力学控制霍尔效应影响

Influence of Hall effect on hypersonic magnetohydrodynamic control

物理学报. 2020, 69(21): 214703 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200630>

掺铌SrTiO<sub>3</sub>中的逆自旋霍尔效应

Inverse spin Hall effect in Nb doped SrTiO<sub>3</sub>

物理学报. 2019, 68(10): 106101 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190118>

自旋轨道耦合系统中的整数量子霍尔效应

Integer quantum Hall effect in a spin-orbital coupling system

物理学报. 2019, 68(11): 117101 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190037>

具有大磁晶各向异性性能的单层BaPb的室温量子反常霍尔效应

Room-temperature quantum anomalous Hall effect in monolayer BaPb with large magnetocrystalline anisotropy energies

物理学报. 2021, 70(15): 157502 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210014>

斯格明子电子学的研究进展

Overview and advances in skyrmionics

物理学报. 2018, 67(13): 131205 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180554>