

椭圆函数背景下 Gerdjikov-Ivanov 方程的多呼吸子*

姚慧 张海强[†] 熊玮玥

(上海理工大学理学院, 上海 200093)

(2023 年 9 月 29 日收到; 2023 年 10 月 27 日收到修改稿)

作为非线性发展方程的一种特殊局域解, 呼吸子具有包络振荡结构, 且这种振荡呈现周期性变化. 根据呼吸子在分布方向和演化方向的周期性, 呼吸子主要有 3 种类型, 即 Kuznetsov-Ma 呼吸子 (Kuznetsov-Ma breather, KMB)、Akhmediev 呼吸子 (Akhmediev breather, AB) 和一般呼吸子 (general breather, GB). 近年来, 周期背景下的呼吸子现象在许多非线性物理领域被观察到, 比如在非线性光纤光学、流体力学等. 研究表明背景周期波的调制不稳定性可以激发呼吸子的产生, 且周期背景下的呼吸子具有非常丰富的物理性质和相互作用. 因此, 最近在周期背景下呼吸子的时空结构和相互作用引起了广泛关注. Gerdjikov-Ivanov 方程可以被用来描述在量子场理论、弱非线性色散水波、非线性光学等领域中的非线性物理现象. 构造该模型的各种类型的解是非常有意义的工作. 据了解, 在椭圆函数背景下的多呼吸子之前还未被研究过. 本文首先利用修正的平方波 (modified squared wave, MSW) 函数法和行波变换法获得该方程的椭圆函数解. 然后, 在椭圆函数解初始条件下得到该方程 Lax 对的通解. 基于椭圆函数的转换公式以及积分公式, 将势函数周期解化简为只含有 Weierstrass 椭圆函数. 然后, 利用达布变换构造出在椭圆函数背景下呼吸子的具体表达形式. 在椭圆函数背景下, 推导出 3 种不同类型的呼吸子, 包括 GB, KMB 和 AB. 最后, 给出 3 种呼吸子的时空结构三维图, 并且展示它们之间相互作用的过程.

关键词: Gerdjikov-Ivanov 方程, 椭圆函数, 达布变换, 呼吸子

PACS: 02.30.Ik, 02.30.Jr, 05.45.Yv

DOI: 10.7498/aps.73.20231590

1 引言

随着自然科学的不断发展进步, 研究非线性科学逐渐成为热点课题之一^[1,2]. 在研究人员的不断探索下, 人们发现非线性发展方程可以描述许多非线性现象, 包括非线性薛定谔 (nonlinear Schrödinger, NLS) 方程^[3,4], modified Korteweg-de Vrie (mKdV) 方程^[5], Hirota 方程和 Gerdjikov-Ivanov (GI) 方程^[6]等. 作为非线性发展方程的局域解, 孤子、呼吸子和怪波可以被用来揭示自然科学和工程

技术中的许多非线性局域现象. 呼吸子泛指一类具有周期分布结构的非线性波, 可以在有限背景的某一空间或传播方向局域, 且具有周期振荡的特点^[7]. 20 世纪 70 年代, Kuznetsov^[8] 和 Ma^[9] 对 NLS 方程进行求解时发现了一种特殊的非线性波, 该波表现出在空间方向上局域, 时间方向上周期呼吸的特征. 人们称为“Kuznetsov-Ma 呼吸子” (Kuznetsov-Ma breather, KMB).

1986 年, Akhmediev 等^[10] 在构造 NLS 方程的呼吸子时, 发现一类与 KMB 的结构完全不同的非线性波, 将其称为“Akhmediev 呼吸子” (Akhme-

* 上海市自然科学基金 (批准号: 18ZR1426600) 资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: hqzhang@usst.edu.cn

diev breather, AB), 该非线性波具有在时间方向上局域、空间方向上周期的特点. 1988年, 其以 NLS 方程为研究对象, 得到了一类不拘泥于时间或空间方向周期震荡的呼吸子^[11]. 在学者们的不断探索下, 呼吸子的应用价值已在非线性光学^[12]、流体力学^[13]、玻色-爱因斯坦凝聚和流体力学^[14,15] 等非线性物理中体现. NLS 方程一直以来都是孤子方程中的热点, 于是在 NLS 方程的基础上, 开始寻找推广的 NLS 方程. 作为 NLS 方程的可积推广, 导数型 NLS 方程^[16] 应运而生, 该类型方程具有 3 种不同形式, 可以被用于描述非线性光学和其他领域中重要的非线性波的传播. 1978年, Kaup 和 Newell^[17] 提出了第一型导数 NLS 方程:

$$iq_t - q_{xx} + i(q^2 q^*)_x = 0. \quad (1)$$

1979年, Chen, Lee 和 Liu^[18] 推导了第二型导数 NLS 方程:

$$iq_t + q_{xx} + iq q^* q_x = 0. \quad (2)$$

该方程被称作 Chen-Lee-Liu (CLL) 方程. 自这两种模型建立以来, 许多可积性质和精确解已经被大量的文献研究. Liu 等^[19] 发现 CLL 模型的 AB 呼吸子能够描述更一般的非对称调制不稳定性, 并且给出了其精确解析谱.

1983年, Gerdzhikov 和 Ivanov^[20] 提出了第三型导数 NLS 方程:

$$iq_t + q_{xx} - iq^2 q_x^* + \frac{1}{2} q^3 q^{*2} = 0, \quad (3)$$

即 GI 方程. 这里 $q = q(x, t)$, 其中 x 表示空间坐标, t 表示时间坐标, 符号*表示复共轭, 下标表示偏导数. 已经有许多学者对此方程进行了研究, 并推导出在零背景下的呼吸子^[21-23]. 对于此方程, Fan^[24,25] 给出了双哈密顿结构、Liouville 可积性和代数几何解. 随后, Xu 等^[26,27] 构造了方程的高阶怪波和高阶有理解的行列式表达式.

呼吸子在周期性背景上的动态行为比它们在恒定背景下的行为更真实^[28]. 这样, 椭圆函数周期背景下的解的研究尤为重要. Chen 和 Pelinovsky^[29] 将 Lax 对非线性化与达布变换方法相结合, 提出了椭圆函数背景下 NLS 方程多呼吸子的系统构造方法. 利用此方法来求解许多非线性方程的呼吸子解, 包括 GB, KMB 和 AB. 由于 GI 方程的 Lax 对谱问题不同于 NLS 方程, 在椭圆函数背景下构造这些解是一项非常困难的任务. 除了标量系统中

的呼吸子外, 耦合系统 (例如 Manakov 系统) 中的呼吸子也引起了广泛关注^[30-33]. 研究表明耦合系统可以激发出新的矢量非线性现象^[34]、非退化孤子^[35] 和非退化怪波^[36].

本文主要研究椭圆函数背景下多呼吸子的非线性动力学. 将从以下 3 个方面对方程 (3) 进行研究: 1) 利用 MSW 函数法和行波变换法获得该方程的椭圆函数解和 Lax 对通解; 2) 利用达布变换构造出在椭圆函数背景下呼吸子的具体表达形式, 包括 GB, KMB 和 AB; 3) 分析 3 种呼吸子的时空结构分布、非线性动力学行为和相互作用.

2 Lax 对

GI 方程是完全可积的, 它可以表示为一个线性系统的相容条件, 即

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_t = V\Psi, \quad (4)$$

$$U = \begin{pmatrix} F & G \\ H & -F \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & -v_{11} \end{pmatrix},$$

其中,

$$F = -i\lambda^2 + \frac{1}{2}i|q|^2, \quad G = \lambda q, \quad H = -\lambda q^*,$$

$$v_{11} = -2i\lambda^4 + i\lambda^2|q|^2 + \frac{1}{2}(qq_x^* - q^*q_x) + \frac{i}{4}|q|^4,$$

$$v_{12} = 2\lambda^3 q + i\lambda q_x, \quad v_{21} = -2\lambda^3 q^* + i\lambda q_x^*.$$

这里, $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$ 是本征函数, λ 是谱参数. 由相容条件 $\Psi_{tx} = \Psi_{xt}$ 或零曲率方程 $U_t - V_x + [U, V] = 0$ 可以推导出方程 (3).

3 椭圆函数解和 Lax 对通解

3.1 椭圆函数解

方程 (3) 有如下形式的解:

$$q(x, t) = \sqrt{v(x, t)} \exp(\theta), \quad (5)$$

其中 $v(x, t)$ 是一个实函数, 下文将对上述待定的势函数中的未知元素进行求解.

设定 $\Psi_1 = (\phi_1, \varphi_1)^T$ 以及 $\Psi_2 = (\phi_2, \varphi_2)^T$, 建立平方波函数:

$$\begin{aligned}
 f(x, t; \lambda) &= -\frac{i}{2}(\phi_1(x, t; \lambda)\varphi_2(x, t; \lambda) \\
 &\quad + \phi_2(x, t; \lambda)\varphi_1(x, t; \lambda)), \\
 g(x, t; \lambda) &= \phi_1(x, t; \lambda)\phi_2(x, t; \lambda), \\
 h(x, t; \lambda) &= -\varphi_1(x, t; \lambda)\varphi_2(x, t; \lambda).
 \end{aligned}$$

f, g, h 满足以下线性系统:

$$\begin{aligned}
 \partial f / \partial x &= -iHg + iGh, \\
 \partial g / \partial x &= 2iGf + 2Fg, \\
 \partial h / \partial x &= -2iHf - 2Fh, \\
 \partial f / \partial t &= -iv_{21}g + iv_{12}h, \\
 \partial g / \partial t &= 2iv_{12}f + 2v_{11}g, \\
 \partial h / \partial t &= -2iv_{21}f - 2v_{11}h.
 \end{aligned} \tag{6}$$

由于矩阵 U, V 迹为零, 很容易验证 $P(\lambda) = f^2 - gh$ 不依赖于变量 x, t , 所以它只依赖于谱参数 λ . 研究表明可积演化方程的周期解或拟周期解与几何代数理论中的黎曼曲面概念有着一定的联系. 为了得到方程 (3) 在初解 (5) 式周期背景上的呼吸子解, 将 $P(\lambda)$ 设置为关于 λ 的一个多项式:

$$\begin{aligned}
 P(\lambda) &= f^2 - gh = \prod_{j=1}^4 (\lambda^2 - \lambda_j^2) \\
 &= \lambda^8 - s_1\lambda^6 + s_2\lambda^4 - s_3\lambda^2 + s_4,
 \end{aligned}$$

其中 $\lambda_j, j = a, b, c, d$ 为多项式的根.

线性系统 (6) 和系统 (7) 具有多项式形式的解, 故将 f, g 以及 h 写成如下形式:

$$f = \lambda^4 - f_1\lambda^2 + f_2, \tag{8}$$

$$g = \lambda q (\lambda^2 - \omega(x, t)), \tag{9}$$

$$h = \lambda q^* (\lambda^2 - \omega^*(x, t)). \tag{10}$$

比较等式 $P(\lambda) = f^2 - gh$ 两边 λ 的系数, 得到如下等式:

$$\begin{aligned}
 f_2^2 &= s_4, \quad -2f_1f_2 + |q|^2\omega\omega^* = -s_3, \\
 f_1^2 + 2f_2 - |q|^2\omega - |q|^2\omega^* &= s_2, \\
 -2f_1 + |q|^2 &= -s_1.
 \end{aligned} \tag{11}$$

令 $|q|^2 = v$, 则 (11) 式转化为

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{s_1 + v}{2}, \quad f_2 = \sqrt{s_4}, \\
 \omega\omega^* &= \frac{s_3 - (v + s_1)\sqrt{s_4}}{-v}, \\
 \omega + \omega^* &= \frac{f_1^2 + 2f_2 - s_2}{v}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

根据韦达定理, 得到 ω 关于 v 的表达式:

$$\omega(v) = \frac{1}{8v} \left[s_1^2 - 4s_2 + 8\sqrt{s_4} + 2s_1v + v^2 - i\sqrt{-R(v)} \right], \tag{13}$$

其中, $R(v)$ 是 v 的四次多项式:

$$\begin{aligned}
 R(v) &= v^4 + 4s_1v^3 + v^2(6s_1^2 - 8s_2 - 48\sqrt{s_4}) \\
 &\quad + v(4s_1^3 - 16s_1s_2 + 64s_3 - 32s_1\sqrt{s_4}) \\
 &\quad + (s_1^2 - 4s_2 + 8\sqrt{s_4})^2.
 \end{aligned} \tag{14}$$

若取 $\sqrt{s_4} = \lambda_a\lambda_b\lambda_c\lambda_d$, 可以计算出方程 (14) 的零点与多项式 $P(\lambda)$ 的零点的关系:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= -(\lambda_a - \lambda_b + \lambda_c - \lambda_d), \\
 v_2 &= -(-\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c - \lambda_d), \\
 v_3 &= -(\lambda_a + \lambda_b - \lambda_c - \lambda_d), \\
 v_4 &= -(\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c + \lambda_d).
 \end{aligned} \tag{15}$$

若取 $\sqrt{s_4} = -\lambda_a\lambda_b\lambda_c\lambda_d$, 则

$$\begin{aligned}
 v_1 &= -(\lambda_a - \lambda_b - \lambda_c - \lambda_d), \\
 v_2 &= -(\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c - \lambda_d), \\
 v_3 &= -(\lambda_a + \lambda_b - \lambda_c + \lambda_d), \\
 v_4 &= -(\lambda_a - \lambda_b + \lambda_c + \lambda_d).
 \end{aligned} \tag{16}$$

结合方程组 (6) 和 (7) 以及方程 (8) 求导的结果, 对比 λ 各阶系数的关系可以得到:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{-R(v)}, \tag{17}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{s_1}{2}\sqrt{-R(v)}. \tag{18}$$

根据方程 (17) 和方程 (18) 可以得到 v 仅和 $\delta = x + s_1t$ 有关, 即:

$$\frac{dv}{d\delta} = \frac{1}{2}\sqrt{-R(v)}. \tag{19}$$

显然, 方程 (19) 具有椭圆函数解. 这样, 如果 v 已知, 那么通过方程 (5) 就能求出 $q(x, t)$.

结合方程组 (6), (7) 以及方程 (9) 求导的结果, 对比 λ 各阶系数的关系可以得到:

$$\omega_x(x, t) = -2if(\omega^{1/2}), \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_t(x, t) &= -2i(2f_1(x, t) - |q(x, t)|^2)\sqrt{P(\omega^{1/2})} \\
 &= -2is_1\sqrt{P(\omega^{1/2})} = s_1\omega_x.
 \end{aligned} \tag{21}$$

当 $\lambda^2 = \omega$ 时, $f(\omega^{1/2}) = \sqrt{P(\omega^{1/2})}$, 则 (20) 式可以转换为

$$\omega_x(x, t) = -2i\sqrt{P(\omega^{1/2})}. \tag{22}$$

因此可得到 ω 关于 x 和 t 的等式. 由方程 (21) 和方程 (22), 易知 ω 仅依赖于相位 $\delta = x + s_1 t$. 于是, GI 方程周期解的非线性相速度为

$$V = -s_1 = -(\lambda_a^2 + \lambda_b^2 + \lambda_c^2 + \lambda_d^2).$$

根据上述公式, 得到 q 关于 x, t 的等式如下:

$$q_x = -iq(s_1 - 2\omega),$$

$$q_t = s_1 q_x - \frac{1}{2}iq(s_1^2 - 4s_2).$$

经行波变换后, 周期解有如下形式:

$$q(x, t) = \exp\left[-\frac{1}{2}i(s_1^2 - 4s_2)t\right] \tilde{q}(\delta),$$

$$\frac{d\tilde{q}}{d\delta} = -i(s_1 - 2\omega)\tilde{q}.$$

将 (13) 式代入上式, 则

$$q(\delta, t) = \sqrt{v} \exp(\theta), \quad (23)$$

式中,

$$\theta = -\frac{1}{2}i(s_1^2 - 4s_2)t - is_1\delta + \frac{i}{4} \int \frac{1}{v} (s_1^2 - 4s_2 + 8\sqrt{s_4} + 2s_1v + v^2) d\delta.$$

显然, 选取合适的 λ_j 应该满足 v 在两个正值之间振荡. 若只有两个 v_i 是正实数, 则设置相应的 λ_j 使其在 v_1, v_2 之间振荡, 且 $v_1 \geq v_2$. 若所有 v_i 都是正实数, 则我们设置相应的 λ_j 使 $v_1 \geq v_2 \geq v_3 \geq v_4$. 此时, 变量 v 可以在 v_1, v_2 或者 v_3, v_4 之间振荡, 且 $R(v) \leq 0$.

为满足以上条件, 设 λ_j 由两对复共轭对组成:

$$\lambda_a = \alpha + i\beta, \quad \lambda_b = \alpha - i\beta,$$

$$\lambda_c = \gamma + i\sigma, \quad \lambda_d = \gamma - i\sigma.$$

由 (15) 式可得:

$$v_1 = 4(\beta + \sigma)^2, \quad v_2 = 4(\beta - \sigma)^2,$$

$$v_3 = -4(\alpha - \gamma)^2, \quad v_4 = -4(\alpha + \gamma)^2.$$

此时 (16) 式得到的 v_i 均为复数值.

为寻找周期解, 讨论变量 v 在区间 $v_1 \geq v \geq v_2$ 振荡, 且 v_3, v_4 为实数的情况. 选择初始条件 $\delta = 0$ 时 $v = v_1$, (19) 式具有如下形式的解:

$$v = \frac{v_1(v_2 - v_4) + (v_1 - v_2)v_4 \operatorname{sn}^2\left(\sqrt{(v_1 - v_3)(v_2 - v_4)} \frac{\delta}{2}, m\right)}{v_2 - v_4 + (v_1 - v_2) \operatorname{sn}^2\left(\sqrt{(v_1 - v_3)(v_2 - v_4)} \frac{\delta}{2}, m\right)}, \quad (24)$$

其中, $m = \frac{(v_1 - v_2)(v_3 - v_4)}{(v_1 - v_3)(v_2 - v_4)}$.

3.2 Lax 对通解

在行波变换 $\delta = x + s_1 t$ 下, GI 方程的 Lax 对可以改写成:

$$\Psi_x = \mathbf{U}\Psi, \quad \Psi_t = (\mathbf{V} - s_1 \mathbf{U})\Psi. \quad (25)$$

先引入两个变量 $\eta_1 = \frac{\phi_1(\delta, t)}{\varphi_1(\delta, t)}$ 和 $\eta_2 = \frac{\psi_1(\delta, t)}{\phi_1(\delta, t)}$, 从平方波函数中可以得到:

$$\eta_1 = -i \frac{f - \sqrt{P}}{g}, \quad \eta_2 = i \frac{f + \sqrt{P}}{g}. \quad (26)$$

根据计算, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{1,\delta}}{\varphi_1} &= -\frac{i}{8} \left[4v + \frac{\lambda^2 \left(-4s_2 + 8\sqrt{s_4} - 8\lambda^2 v + (s_1 + v)^2 - 2iv_x \right)}{\sqrt{P} + \lambda^4 + \sqrt{s_4} - \frac{1}{2}\lambda^2(s_1 + v)} \right] + i\lambda^2, \\ \frac{\phi_{1,\delta}}{\phi_1} &= \frac{i}{8} \left[4v + \frac{\lambda^2 \left(-4s_2 + 8\sqrt{s_4} - 8\lambda^2 v + (s_1 + v)^2 - 2iv_x \right)}{-\sqrt{P} + \lambda^4 + \sqrt{s_4} - \frac{1}{2}\lambda^2(s_1 + v)} \right] - i\lambda^2. \end{aligned} \quad (27)$$

对上述表达式进行化简, 得到如下形式:

$$\phi_1 = A_1 \sqrt{v - 2N_1} \exp(\theta_1), \quad \varphi_1 = A_2 \sqrt{v - 2N_2} \exp(-\theta_2), \quad (28)$$

其中, A_1 和 A_2 表示待定的复常数:

$$\begin{aligned} 2N_1 &= \frac{-2\sqrt{P} + 2\lambda^4 - \lambda^2 s_1 + 2\sqrt{s_4}}{\lambda^2}, \quad 2N_2 = \frac{2\sqrt{P} + 2\lambda^4 - \lambda^2 s_1 + 2\sqrt{s_4}}{\lambda^2}, \\ \theta_1 &= \frac{-i}{4} \int \left[\frac{-4s_2 + 8\sqrt{s_4} - 8\lambda^2 v + (s_1 + v)^2}{v - 2N_1} - 2v \right] d\delta - i\lambda^2 \delta + G(t), \\ \theta_2 &= \frac{i}{4} \int \left[\frac{-4s_2 + 8\sqrt{s_4} - 8\lambda^2 v + (s_1 + v)^2}{v - 2N_2} - 2v \right] d\delta + i\lambda^2 \delta + F(t). \end{aligned} \quad (29)$$

利用 Lax 对中 t 部分的等式, 可以求出 $\varphi_{1,t}/\varphi_1$, $\phi_{1,t}/\phi$, 代入 3.1 节所求的参数, 得到

$$G(t) = \frac{i}{4} (8\sqrt{P} - s_1^2 + 4s_2) t, \quad F(t) = \frac{i}{4} (8\sqrt{P} + s_1^2 - 4s_2) t. \quad (30)$$

根据前面的定义, 有

$$\eta_1(0, 0; \lambda) = i \sqrt{\frac{f(0, 0; \lambda) - \sqrt{P}}{f(0, 0; \lambda) + \sqrt{P}}} \sqrt{\frac{g(0, 0; \lambda)}{h(0, 0; \lambda)}} = \pm \sqrt{\frac{v(0) - 2N_1}{v(0) - 2N_2}} \equiv \frac{A_1}{A_2} \sqrt{\frac{v(0) - 2N_1}{v(0) - 2N_2}},$$

不失一般性, 可设定 $A_1 = 1$, $A_2 = -1$.

同理, 易得 Lax 对的第 2 组通解形式如下:

$$\phi_2 = A_1 \sqrt{v - 2N_2} \exp(\theta_2), \quad \varphi_2 = A_2 \sqrt{v - 2N_1} \exp(-\theta_1). \quad (31)$$

因此, 给定椭圆函数势 (23) 的 Lax 对的通解可以表示为

$$\Psi(\delta, t) = \begin{bmatrix} \sqrt{v - 2N_1} \exp(\theta_1) & \sqrt{v - 2N_2} \exp(\theta_2) \\ -\sqrt{v - 2N_2} \exp(-\theta_2) & -\sqrt{v - 2N_1} \exp(-\theta_1) \end{bmatrix},$$

其中 θ_1 , θ_2 由 (29) 式可知.

4 周期背景下的多呼吸子

4.1 解的化简

根据公式:

$$(\wp'(z))^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3),$$

可以得到

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{48} [2(v_1 - v_3)(v_2 - v_4) - (v_1 - v_2)(v_3 - v_4)], \\ e_2 &= \frac{1}{48} [2(v_1 - v_2)(v_3 - v_4) - (v_1 - v_3)(v_2 - v_4)], \\ e_3 &= -\frac{1}{48} [2(v_1 - v_2)(v_3 - v_4) + (v_1 - v_3)(v_2 - v_4)]. \end{aligned} \quad (32)$$

将 (32) 式代入 $\text{sn}^2(z) = \frac{e_1 - e_3}{\wp(z) - e_3}$, 得到

$$\text{sn}^2(z) = \frac{(1/16)(v_1 - v_3)(v_2 - v_4)}{\wp(z) - e_3}. \quad (33)$$

将 (33) 式代入 (24) 式中, 可得

$$v = v_1(\wp(\delta) - \wp(\rho)) \cdot (\wp(\delta) - \wp(\kappa))^{-1}, \quad (34)$$

其中,

$$\wp(\rho) = e_3 - \frac{1}{16} \frac{v_4}{v_1} (v_1 - v_2)(v_1 - v_3), \quad \wp(\kappa) = e_3 - \frac{1}{16} (v_1 - v_2)(v_1 - v_3). \quad (35)$$

再根据公式:

$$\int \frac{du}{\wp(u) - \wp(v)} = \frac{1}{\wp'} \left[2u\zeta(v) + \ln \frac{\sigma(u-v)}{\sigma(u+v)} \right], \quad (36)$$

此时 (23) 式可化简为

$$q(\delta, t) = \sqrt{v} \exp \left[\delta \left(\frac{i(s_1^2 - 4s_2 + 8\sqrt{s_4} - 2s_1v_1 + v_1^2)}{4v_1} + \zeta(\kappa) + \zeta(\rho) \right) \right] \\ \times \exp \left[\frac{-i}{2} (s_1^2 - 4s_2) t \right] \exp \left[\frac{1}{2} \left(\ln \frac{\sigma(\delta - \kappa)}{\sigma(\delta + \kappa)} + \ln \frac{\sigma(\delta - \rho)}{\sigma(\delta + \rho)} \right) \right]. \quad (37)$$

4.2 GI 方程的 n 次达布变换

在规范变换下:

$$\Psi^{[1]} = T[1]\Psi, \quad (38)$$

谱问题 (4) 式转换为

$$\Psi_x^{[1]} = U^{[1]}\Psi^{[1]}, \quad U^{[1]} = (T[1]_x + T[1]U)T[1]^{-1}, \quad \Psi_t^{[1]} = V^{[1]}\Psi^{[1]}, \quad V^{[1]} = (T[1]_t + T[1]V)T[1]^{-1}, \quad (39)$$

其中, $U^{[1]}$ 和 $V^{[1]}$ 与 Lax 对中的 U 和 V 的形式相同, 不同的是 q 变为 $q[1]$.

设 $\Psi_i = (\phi_i, \varphi_i)^T$, $i = 1, 2, \dots, n$, 为谱问题 (4) 式的 n 组线性无关的解, 则 n 阶达布变换中新的解 $q[n]$ 和初解 $q[0]$ 之间满足:

$$q[n] = q[0] + 2i \frac{B_{11}}{B_{12}}, \quad (40)$$

其中, n 为偶数,

$$B_{11} = \begin{vmatrix} \phi_1 & \lambda_1 \varphi_1 & \dots & \lambda_1^{n-2} \phi_1 & -\lambda_1^n \phi_1 \\ \phi_2 & \lambda_2 \varphi_2 & \dots & \lambda_2^{n-2} \phi_2 & -\lambda_2^n \phi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{n-1} & \lambda_{n-1} \varphi_{n-1} & \dots & \lambda_{n-1}^{n-2} \phi_{n-1} & -\lambda_{n-1}^n \phi_{n-1} \\ \phi_n & \lambda_n \varphi_n & \dots & \lambda_n^{n-2} \phi_n & -\lambda_n^n \phi_n \end{vmatrix}, \quad (41)$$

$$B_{12} = \begin{vmatrix} \phi_1 & \lambda_1 \varphi_1 & \dots & \lambda_1^{n-2} \phi_1 & \lambda_1^{n-1} \varphi_1 \\ \phi_2 & \lambda_2 \varphi_2 & \dots & \lambda_2^{n-2} \phi_2 & \lambda_2^{n-1} \varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{n-1} & \lambda_{n-1} \varphi_{n-1} & \dots & \lambda_{n-1}^{n-2} \phi_{n-1} & \lambda_{n-1}^{n-1} \varphi_{n-1} \\ \phi_n & \lambda_n \varphi_n & \dots & \lambda_n^{n-2} \phi_n & \lambda_n^{n-1} \varphi_n \end{vmatrix}. \quad (42)$$

4.3 dn 椭圆函数背景下的呼吸子

单呼吸子的具体表达式为

$$q[2] = q + 2i \left| \begin{vmatrix} \Psi_1 & -\lambda_1^2 \Psi_1 \\ \Psi_2 & -\lambda_2^2 \Psi_2 \end{vmatrix} \cdot \left| \begin{vmatrix} \Psi_1 & -\lambda_1 \Psi_3 \\ \Psi_2 & -\lambda_2 \Psi_4 \end{vmatrix} \right|^{-1} \right., \quad (43)$$

其中, $q, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$ 和 Ψ_4 分别为

$$q = \sqrt{v} \exp \left[\delta \left(\frac{i(s_1^2 - 4s_2 + 8\sqrt{s_4} - 2s_1v_1 + v_1^2)}{4v_1} + \zeta(\kappa) + \zeta(\rho) \right) \right] \\ \times \exp \left[\frac{-i}{2} (s_1^2 - 4s_2) t \right] \exp \left[\frac{1}{2} \left(\ln \frac{\sigma(\delta - \kappa)}{\sigma(\delta + \kappa)} + \ln \frac{\sigma(\delta - \rho)}{\sigma(\delta + \rho)} \right) \right], \\ \Psi_j = \sqrt{v - 2N_1(\lambda_j)} \exp(\theta_1(\lambda_j)) + \sqrt{v - 2N_2(\lambda_j)} \exp(\theta_2(\lambda_j)), \quad j = 1, 2, \\ \Psi_{2+j} = -\sqrt{v - 2N_2(\lambda_j)} \exp(-\theta_2(\lambda_j)) - \sqrt{v - 2N_1(\lambda_j)} \exp(-\theta_1(\lambda_j)), \quad j = 1, 2, \\ \theta_1 = \frac{-i}{4} \int \left(\frac{-4s_2 + 8\sqrt{s_4} - 8\lambda^2v + (s_1 + v)^2}{v - 2N_1} - 2v \right) d\delta - i\lambda^2\delta + \frac{i}{4} (8\sqrt{P} - s_1^2 + 4s_2) t, \\ \theta_2 = \frac{i}{4} \int \left(\frac{-4s_2 + 8\sqrt{s_4} - 8\lambda^2v + (s_1 + v)^2}{v - 2N_2} - 2v \right) d\delta + i\lambda^2\delta + \frac{i}{4} (8\sqrt{P} + s_1^2 - 4s_2) t, \\ 2N_1 = \frac{-2\sqrt{P} + 2\lambda^4 - \lambda^2s_1 + 2\sqrt{s_4}}{\lambda^2}, \quad 2N_2 = \frac{2\sqrt{P} + 2\lambda^4 - \lambda^2s_1 + 2\sqrt{s_4}}{\lambda^2}.$$

式中, $\Psi_i, i = 1, 2, 3, 4$ 为谱参数 λ 取不同值时的线性解. 因此, 谱参数的值影响呼吸子解及其动态行为. 通过改变谱参数的值, 得到 3 种呼吸子解, 即 GB, AB 和 KMB.

选取特定参数, 呈现出 dn 背景下的呼吸子解 $\lambda_a = 1 + 0.5i, \lambda_b = 1 - 0.5i, \lambda_c = 0.5 + i, \lambda_d = 0.5 - i$.

取参数 $\lambda_1 = 0.3 + 1.1i, \lambda_2 = 0.3 - 1.1i$ 则得到在 dn 背景下的一个 AB (图 1). 观察可得, 此呼吸子的所有峰值都在 $t = 0$ 这一条线上, 此时这种呼

吸子的振幅在原点处达到最大值为 7.65. 选取参数 $\lambda_1 = 2 + 2i, \lambda_2 = 2 - 2i$, 则获得了 dn 背景下的一个 KMB (图 2). 明显看出这种呼吸子是时间呼吸和空间局域的. 此时, 这种呼吸子在原点处的振幅达到最大值为 10.95. 选取参数 $\lambda_1 = 0.3 + 1.3i, \lambda_2 = 0.3 - 1.3i$, 获得了 dn 背景下的 GB (图 3). 此时, 这种呼吸子在原点处振幅达到最大值为 8.18.

为了得到 dn 背景下的双呼吸子, 令 $n = 4$, 根据 (40) 式, 得到二阶呼吸子:

$$q[4] = q + 2i \begin{vmatrix} \Psi_1 & \lambda_1 \Psi_5 & \lambda_1^2 \Psi_1 & -\lambda_1^4 \Psi_1 \\ \Psi_2 & \lambda_2 \Psi_6 & \lambda_2^2 \Psi_2 & -\lambda_2^4 \Psi_2 \\ \Psi_3 & \lambda_3 \Psi_7 & \lambda_3^2 \Psi_3 & -\lambda_3^4 \Psi_3 \\ \Psi_4 & \lambda_4 \Psi_8 & \lambda_4^2 \Psi_4 & -\lambda_4^4 \Psi_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Psi_1 & \lambda_1 \Psi_5 & \lambda_1^2 \Psi_1 & \lambda_1^3 \Psi_5 \\ \Psi_2 & \lambda_2 \Psi_6 & \lambda_2^2 \Psi_2 & \lambda_2^3 \Psi_6 \\ \Psi_3 & \lambda_3 \Psi_7 & \lambda_3^2 \Psi_3 & \lambda_3^3 \Psi_7 \\ \Psi_4 & \lambda_4 \Psi_8 & \lambda_4^2 \Psi_4 & \lambda_4^3 \Psi_8 \end{vmatrix}^{-1}. \quad (44)$$

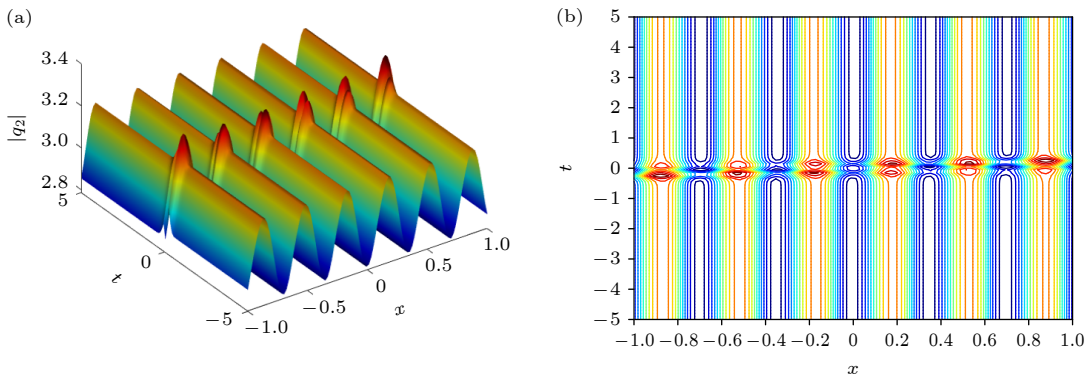


图 1 dn-周期波背景上的 AB
Fig. 1. AB on the dn-periodic wave background.

其中, $\Psi_j (j = 1, 2, \dots, 8)$ 有如下表达式:

$$\Psi_j = \sqrt{v - 2N_1(\lambda_j)} \exp(\theta_1(\lambda_j)) + \sqrt{v - 2N_2(\lambda_j)} \exp(\theta_2(\lambda_j)), \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

$$\Psi_{4+j} = -\sqrt{v - 2N_2(\lambda_j)} \exp(-\theta_2(\lambda_j)) - \sqrt{v - 2N_1(\lambda_j)} \exp(-\theta_1(\lambda_j)), \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

取参数 $\lambda_1 = 2 + 2i, \lambda_2 = 2 - 2i, \lambda_3 = 0.5 + 2i, \lambda_4 = 0.5 - 2i$, 则得到 GB 和 KMB 相互作用的时空结构 (图 4). 可以观察到, 两个呼吸子在相互作用

用后没有波峰的偏移, 最大值为 17.75. 取参数 $\lambda_1 = 2 + 2i, \lambda_2 = 2 - 2i, \lambda_3 = 0.1 + 1.8i, \lambda_4 = 0.1 - 1.8i$, 得到 AB 和 KMB 相互作用的时空结构 (图 5).

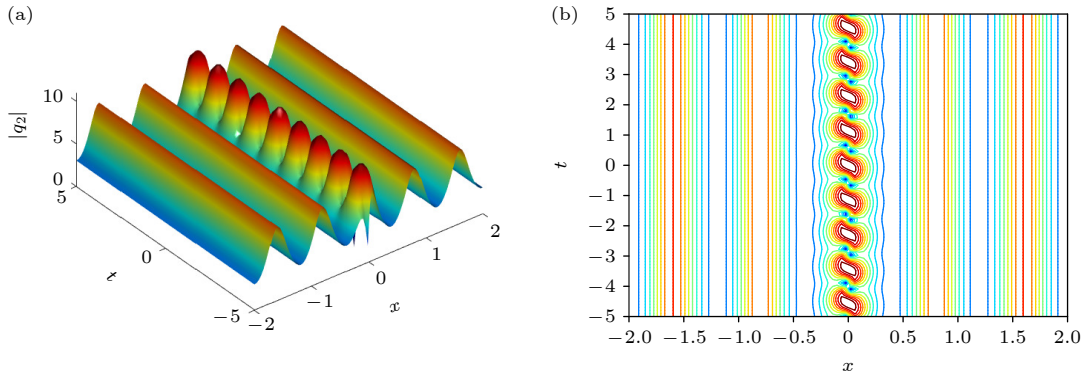


图 2 dn-周期波背景上的 KMB
Fig. 2. KMB on the dn-periodic wave background.

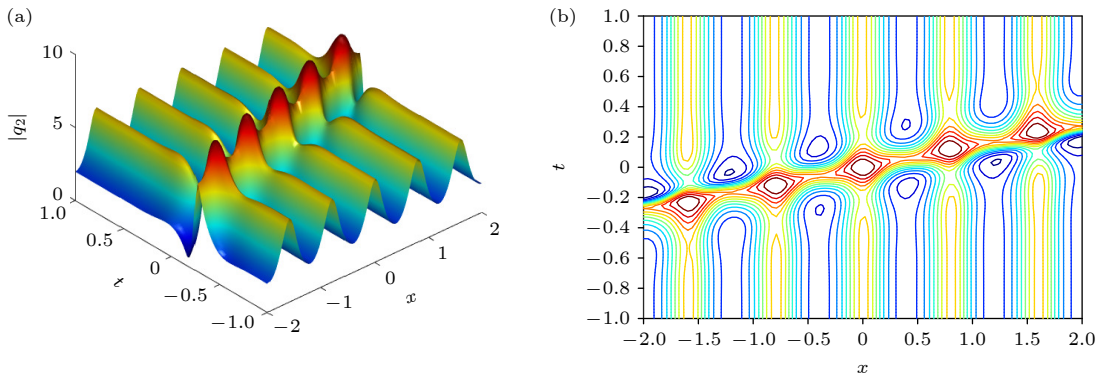


图 3 dn-周期波背景上的 GB
Fig. 3. GB on the dn-periodic wave background.

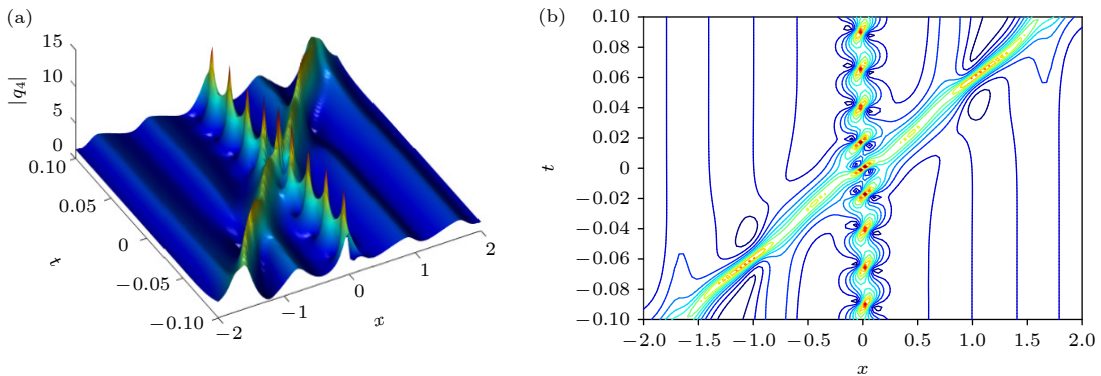


图 4 dn-周期波背景上的 GB 和 KMB 相互作用
Fig. 4. Interaction between GB and KMB on the dn-periodic wave background.

选取参数 $\lambda_1 = 1.5 + 1.6i$, $\lambda_2 = 1.5 - 1.6i$, $\lambda_3 = 0.1 + 1.8i$, $\lambda_4 = 0.1 - 1.8i$, 得到 AB 和 GB 相互作用的时空结构 (图 6).

4.4 一般椭圆函数背景下的呼吸子

与 dn 背景下的呼吸子类似, 在一般椭圆函数背景下构造 3 种呼吸子, 即 GB, AB 和 KMB. 设

定合适的参数来固定背景波 $\lambda_a = 0.5 + 0.3i$, $\lambda_b = 0.5 - 0.3i$, $\lambda_c = 1 + 0.9i$, $\lambda_d = 1 - 0.9i$. 取谱参数 $\lambda_1 = 0.5 + 1.5i$, $\lambda_2 = 0.5 - 1.5i$, 则得到一般椭圆函数背景下的一个 AB (图 7). 此呼吸子的峰值为 8.69. 选取参数 $\lambda_1 = 1.8 + 1.8i$, $\lambda_2 = 1.8 - 1.8i$, 得到了一般椭圆函数背景下的一个 KMB (图 8), 此时最大值为 8.28. 取谱参数 $\lambda_1 = 2 + 2i$,

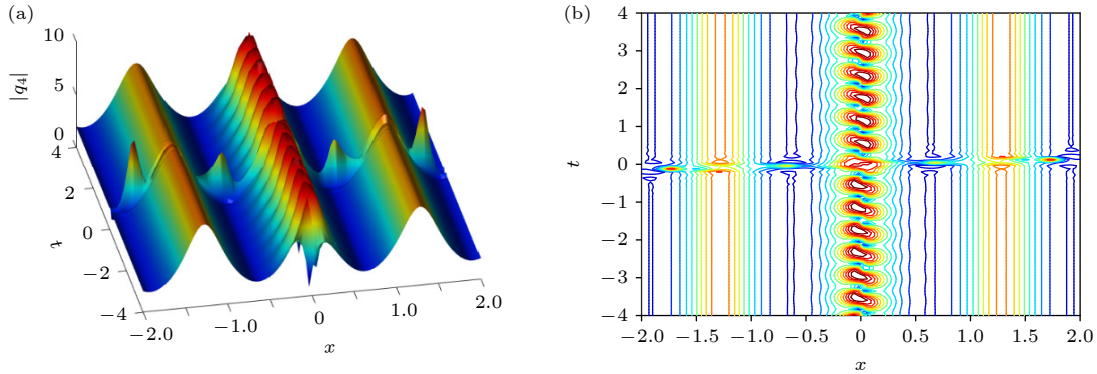


图 5 dn-周期波背景上的 AB 和 KMB 相互作用

Fig. 5. Interaction between AB and KMB on the dn-periodic wave background.

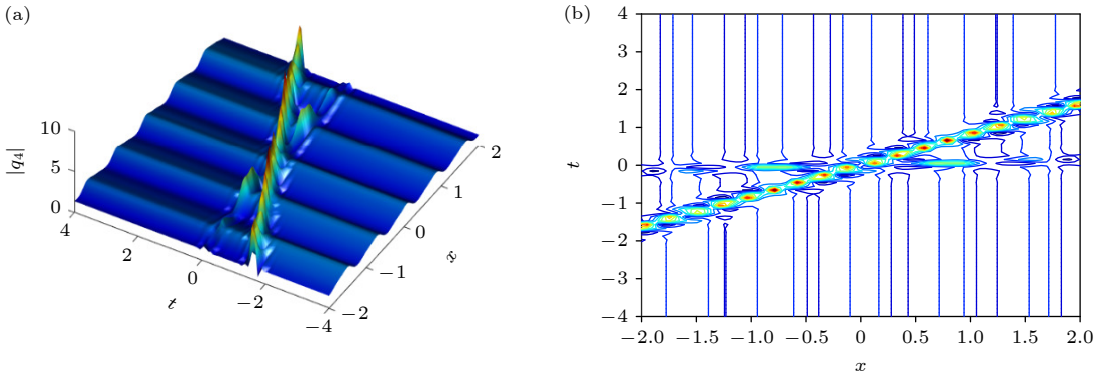


图 6 dn-周期波背景上的 AB 和 GB 相互作用

Fig. 6. Interaction between AB and GB on the dn-periodic wave background.

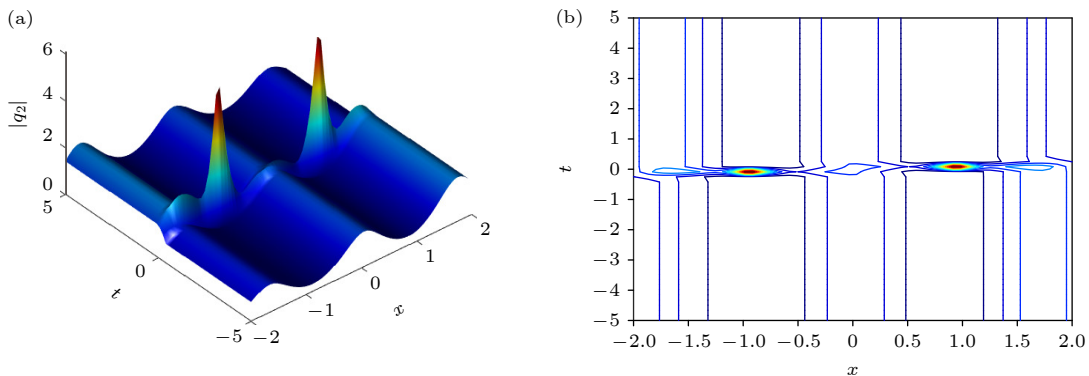


图 7 一般周期波背景上的 AB

Fig. 7. AB on the general periodic wave background.

$\lambda_2 = 2 - 2i$, 得到一般椭圆函数背景下的 GB(图 9), 此时最大值为 8.18.

与 dn 背景下构造二呼吸子相同, 根据 (44) 式, 选取合适的参数得到一般椭圆函数背景下的双呼吸子. 取参数 $\lambda_1 = 2 + 2i$, $\lambda_2 = 2 - 2i$, $\lambda_3 = 0.5 + 2i$, $\lambda_4 = 0.5 - 2i$, 得到了 GB 和 GB 相互作用的时空结构 (图 10). 可以看出, 两个呼吸子在相互作用后

没有波峰的偏移, 最大值为 13.27. 取参数 $\lambda_1 = 2 + 2i$, $\lambda_2 = 2 - 2i$, $\lambda_3 = 0.1 + 2i$, $\lambda_4 = 0.1 - 2i$, 则得到了 GB 和 KMB 相互作用的时空结构 (图 11), 最大值为 16.94. 取参数 $\lambda_1 = 0.2 + i$, $\lambda_2 = 0.2 - i$, $\lambda_3 = 1.4 + 1.4i$, $\lambda_4 = 1.4 - 1.4i$, 则得到 AB 和 GB 相互作用的时空结构 (图 12), 波峰的最大值为 10.05.

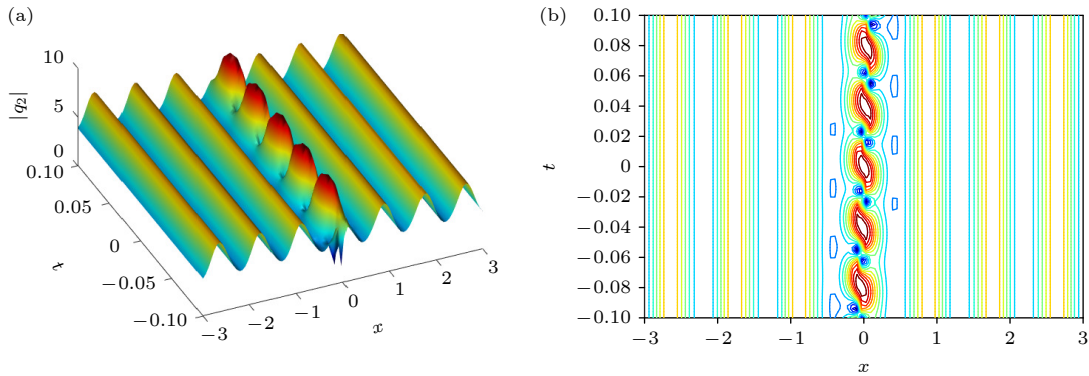


图 8 一般周期波背景上的 KMB
Fig. 8. KMB on the general periodic wave background.

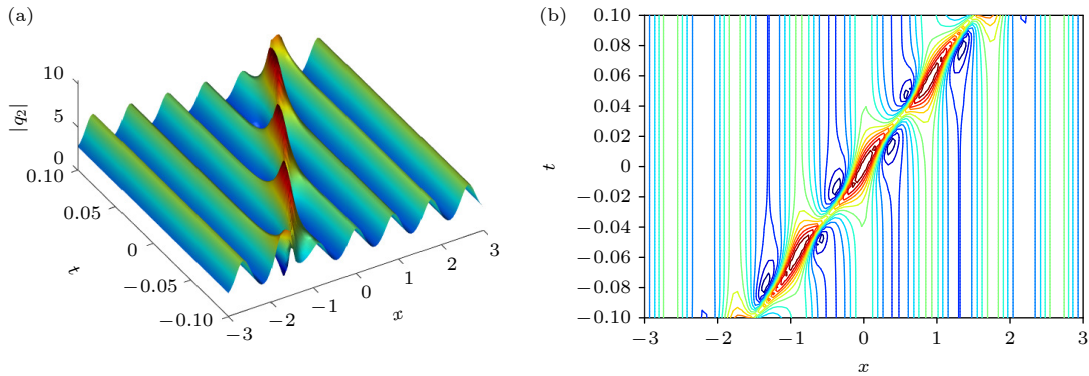


图 9 一般周期波背景上的 GB
Fig. 9. GB on the general periodic wavebackground.

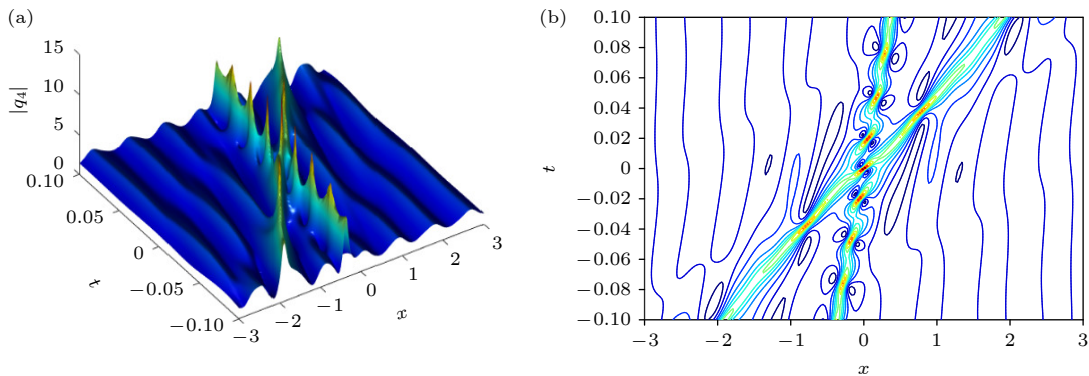


图 10 一般周期波背景上的两个 GB 相互作用
Fig. 10. Inactionteraction between two GBs on the general periodic wave background.

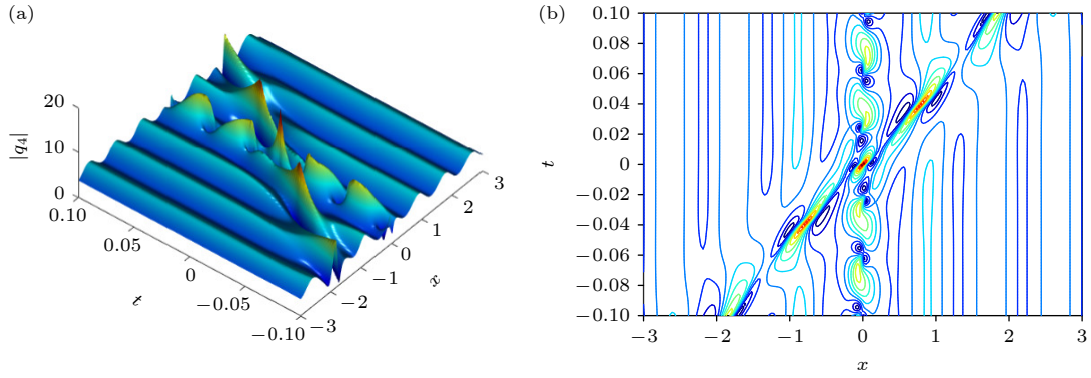


图 11 一般周期波背景上的 KMB 和 GB 相互作用

Fig. 11. Inaction between KMB and GB on the general periodic wave background.

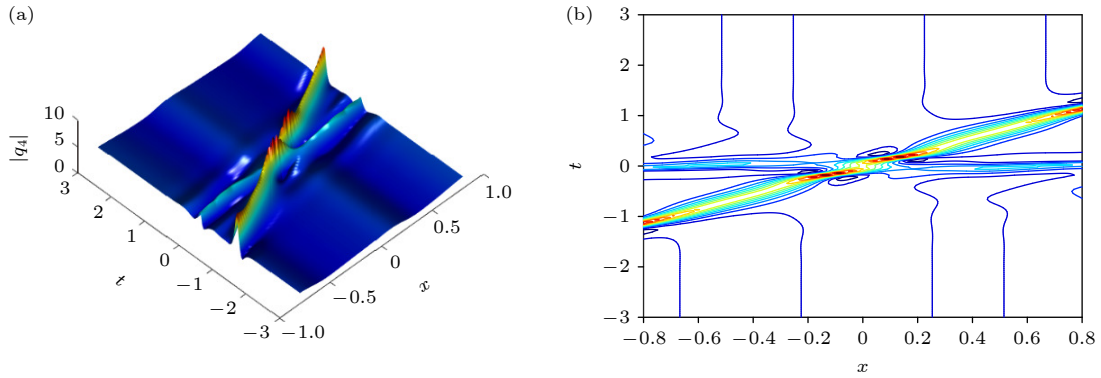


图 12 一般周期波背景上的 AB 和 GB 相互作用

Fig. 12. Interaction between AB and GB on the general periodic wave background.

5 结 论

本文系统地构造了椭圆函数背景下 GI 方程的多呼吸子. 借助 MSW 方法和行波变换, 导出了椭圆函数解和 Lax 对通解. 在椭圆函数背景下, 推导出 3 种不同类型的呼吸子, 包括 GB, KMB 和 AB. 最后, 给出了 3 种呼吸子的时空结构三维图, 并且展示它们之间相互作用的过程. 希望本文获得的结果将有助于理解在流体动力学、非线性光学等领域中周期背景下的呼吸子动力学行为和相互作用.

参考文献

[1] Ablowitz M J, Satsuma J 1978 *J. Math. Phys.* **19** 2180
 [2] Wazwaz A M 2009 *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory* (Berlin: Springer) pp285–413
 [3] Zhou T Y, Tian B 2022 *Appl. Math. Lett.* **133** 108280
 [4] Li B Q, Ma Y L 2020 *Appl. Math. Comput.* **386** 125469
 [5] Kruglov V I, Triki H 2023 *Chin. Phys. Lett.* **40** 090503
 [6] Hosseini K, Mirzazadeh M, Ilie M, Radmehr S 2020 *Optik* **206** 164350
 [7] Vishnu Priya N, Senthilvelan M, Lakshmanan M 2013 *Phys. Rev. E* **88** 022918

[8] Kuznetsov E A 1977 *Sov. Phys. Dokl.* **22** 507
 [9] Ma Y C 1979 *Stud. Appl. Math.* **60** 43
 [10] Akhmediev N, Komeev V I 1986 *Theor. Math. Phys.* **69** 1089
 [11] Its A R, Rybin A V, Sall M A 1988 *Theor. Math. Phys.* **74** 20
 [12] Walczak P, Randoux S, Suret P 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 143903
 [13] Chabchoub A, Hoffmann N P, Akhmediev N 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 204502
 [14] Xiong H, Gan J H, Wu Y 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 153901
 [15] Ding C C, Zhou Q, Xu L, Triki H, Mirzazadeh M, Liu W J 2023 *Chin. Phys. Lett.* **40** 040501
 [16] Li X J 2018 *M. S. Thesis* (Wuhan: Wuhan University) (in Chinese) [黎旭君 2018 硕士学位论文 (武汉: 武汉大学)]
 [17] Kaup D J, Newell A C 1978 *J. Math. Phys.* **19** 798
 [18] Chen H H, Lee Y C, Liu C S 1979 *Phys. Scr.* **20** 490
 [19] Liu C, Wu Y H, Chen S C, Yao X K, Akhmediev N 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 094102
 [20] Gerdzhikov V S, Ivanov M I 1982 *Theor. Math. Phys.* **52** 676
 [21] Ji T, Zhai Y Y 2020 *Nonlinear Dyn.* **101** 619
 [22] Zhang Z C, Fan E G 2021 *Z. Angew. Math. Phys.* **72** 153
 [23] Lou Y, Zhang Y, Ye R S, Li M 2021 *Wave Motion* **106** 102795
 [24] Fan E G 2000 *J. Math. Phys.* **41** 7769
 [25] Dai H H, Fan E G 2004 *Chaos Solitons Fractals* **22** 93
 [26] Xu S W, He J S 2012 *J. Math. Phys.* **53** 063507
 [27] Guo L J, Zhang Y S, Xu S W, Wu Z W, He J S 2014 *Phys. Scr.* **89** 035501
 [28] Kedziora D J, Ankiewicz A, Akhmediev N 2014 *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **223** 43

- [29] Chen J B, Pelinovsky D E 2018 *Proc. R. Soc. A* **474** 20170814
 [30] Leykam D, Smolina E, Maluckov A, Flach S, Smirnova D A 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 073901
 [31] Chen S C, Liu C, Akhmediev N 2023 *Phys. Rev. A* **107** 063507
 [32] Liu C, Chen S C, Yao X K, Akhmediev N 2022 *Chin. Phys. Lett.* **39** 094201
 [33] Che W J, Chen S C, Liu C, Zhao L C, Akhmediev N 2022 *Phys. Rev. A* **105** 043526
 [34] Chen S C, Liu C 2022 *Physica D* **438** 133364
 [35] Che W J, Liu C, Akhmediev N 2023 *Phys. Rev. E* **107** 054206
 [36] Liu C, Chen S C, Yao X K, Akhmediev N 2022 *Physica D* **433** 133192

Breathers of Gerdjikov-Ivanov equation under background of elliptic function*

Yao Hui Zhang Hai-Qiang[†] Xiong Wei-Yue

(College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

(Received 29 September 2023; revised manuscript received 27 October 2023)

Abstract

As one specific type of local solutions of nonlinear evolution equation, the breathers have the characteristic of envelope oscillation structure. This kind of oscillation is periodic. According to the periodicity of the distribution and evolution directions, there are three kinds of breathers, namely, the Kuznetsov-Ma breather (KMB), the Akhmediev breather (AB), and the general breather (GB). In recent years, the propagation of envelope breathers under the periodic background has been observed in many nonlinear physical fields, including nonlinear optical fibers and hydrodynamics. It is believed that the breathers can arise due to the modulational instability of the periodic waves, and they demonstrate many rich physical properties and dynamic behaviors of interactions. Therefore, recently great attention has been paid to the breathers under the periodic background in nonlinear science. As an important integrable model, the Gerdjikov-Ivanov (GI) equation can be used to describe various nonlinear phenomena in many physical fields such as in the quantum field theory, weak nonlinear dispersive water wave, and nonlinear optics. It is very meaningful to solve various types of solutions of this model to describe the propagation of nonlinear waves. As far as we know, the breather solutions for the GI equation have not been given under the elliptic function background. In this study, firstly, elliptic function solutions of the GI equation are solved by the modified squared wave (MSW) function approach and the traveling wave transformation. Then, we obtain the basic solution of the Lax pair corresponding to the Jacobi elliptic function seed solution. Based on the elliptic function transformation formulas and the integral formulas, the potential function solution can be expressed in terms of the Weierstrass elliptic function. Secondly, by the once iterated Darboux transformation, three types of breather solutions under the elliptic function background are constructed including the GB, the KMB and the AB. In addition, we analyze the dynamic behaviors of these three kinds of breathers, and present their three-dimensional space-time structures. By the twice iterated Darboux transformation, under the dn-periodic background we exhibit three types of interactions between two breathers, i.e. a GB and a KMB, an AB and a KMB, and a GB and an AB. Finally, we also present three types of interactions between two breathers under the general periodic background.

Keywords: Gerdjikov-Ivanov equation, elliptic function, Darboux transformation, breathers

PACS: 02.30.Ik, 02.30.Jr, 05.45.Yv

DOI: 10.7498/aps.73.20231590

* Project supported by the Shanghai Natural Science Foundation of China (Grant No. 18ZR1426600).

[†] Corresponding author. E-mail: hqzhang@usst.edu.cn



椭圆函数背景下Gerdjikov–Ivanov方程的多呼吸子

姚慧 张海强 熊玮玥

Breathers of Gerdjikov–Ivanov equation under background of elliptic function

Yao Hui Zhang Hai-Qiang Xiong Wei-Yue

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 73, 040201 (2024) DOI: 10.7498/aps.73.20231590

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231590>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

各向异性海森伯自旋链中的超椭圆函数波解

Wave solitons of hyper-elliptic function in anisotropic Heisenberg spin chain

物理学报. 2018, 67(19): 197502 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181005>

铁磁纳米线中磁化强度的磁怪波

Rogue wave solution in ferromagnetic nanowires

物理学报. 2020, 69(1): 017501 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191352>

一类扰动Kadomtsev–Petviashvili方程的雅可比椭圆函数解的收敛性探讨

Convergence for Jacobi elliptic function series solutions to one kind of perturbed Kadomtsev–Petviashvili equations

物理学报. 2019, 68(14): 140201 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190333>

一个可积的逆空时非局部Sasa–Satsuma方程

An integrable reverse space–time nonlocal Sasa–Satsuma equation

物理学报. 2020, 69(1): 010204 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191887>

Boussinesq方程的Lax对、Bäcklund变换、对称群变换和Riccati展开相容性

The Boussinesq equation: Lax pair, Bäcklund transformation, symmetry group transformation and consistent Riccati expansion solvability

物理学报. 2020, 69(1): 010203 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191316>

权重函数对关联方程估计超声速混合层波前方差精度的影响

Influence of weighting function on accuracy of supersonic mixing layer wave–front variance estimation with linking equation

物理学报. 2019, 68(9): 094202 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182269>