

基于悬挂变量的显式无条件稳定时域有限差分亚网格算法*

何欣波[†] 魏兵

(西安电子科技大学物理学院, 西安 710071)

(2023 年 11 月 16 日收到; 2023 年 12 月 29 日收到修改稿)

时域有限差分 (finite-difference time-domain, FDTD) 方法由于稳定性条件的限制, 在处理含精细结构的电磁问题时效率不高. 显式无条件稳定 (explicit unconditionally stable, EUS) FDTD 方法通过滤除系统矩阵的不稳定模式, 能够消除稳定性条件的限制, 提高精细结构的仿真效率. 然而, EUS-FDTD 方法需要求解数值系统矩阵的特征值, 在采用亚网格方案对含精细结构目标离散时需要保证数值系统矩阵的对称性. 现有的 EUS-FDTD 亚网格方法存在着构造复杂、精度不足等问题. 针对以上问题, 本文将悬挂变量亚网格 (hanging variables subgridding, HVS) 算法应用于 EUS-FDTD 算法中, 从系统矩阵的对称性出发证明了悬挂变量亚网格算法的稳定性, 给出了高精度、稳定、容易实施的 HVS-EUS-FDTD 方案. 通过线磁流在自由空间的辐射、多个介质目标以及三维含介质腔体的数值算例证明了所提方法的稳定性、高精度以及高效性. 数值实验表明, HVS-EUS-FDTD 算法的计算效率相比于均匀细网格 FDTD 算法可提升数百倍, 相比于 HVS-FDTD 算法最高可提升 Ratio (粗细网格尺寸比) 倍.

关键词: 时域有限差分, 显式无条件稳定, 悬挂变量, 精细结构

PACS: 02.70.Bf, 03.50.De, 41.20.Jb

DOI: 10.7498/aps.73.20231813

1 引言

时域有限差分 (finite-difference time-domain, FDTD) 方法具有简单、高效、能够处理复杂介质的特点, 在计算电磁学中广为流行^[1-3]. 然而, FDTD 方法采用显式迭代方案, 其迭代时间步长无法突破稳定性条件 Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) 的限制. 在用 FDTD 方法处理含电小尺寸结构的电磁问题时, 需要使用非常小的网格对其进行网格剖分, 小网格尺寸将会造成小的时间迭代步长, 进而导致迭代步数巨大, 仿真效率低下. 为了消除或减弱稳定性条件的限制, 交替方向隐式 (alternating direction implicit, ADI)^[4-6]、局部一

维 (locally one-dimensional, LOD)^[7-9]、克兰克-尼科尔森 (Crank-Nicolson, CN)^[10,11]、弱条件稳定 (weakly conditionally stable, WCS)^[12,13] 等改进的 FDTD 方法被相继提出, 在某种程度上提升了 FDTD 方法仿真含精细结构目标的计算效率. 然而, 上述方法要么需要求解矩阵方程, 要么数值色散误差较大, 在实际应用中需要平衡计算效率和精度. 近年来, 显式无条件稳定 (explicit unconditionally stable, EUS) FDTD 方法被提出^[14-17], 该方法通过滤除系统矩阵中大特征值对应的特征模式实现无条件稳定, 保留了传统 FDTD 方法显式迭代的优点, 并且具有较高的计算精度.

EUS-FDTD 方法和传统 FDTD 方法类似, 采用结构网格 (Yee 元胞) 离散计算区域. 当计算区

* 国家自然科学基金 (批准号: 62201411, 62371378) 资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: hexinbo@xidian.edu.cn

域中含有电小尺寸目标时,为了精确模拟该目标的几何结构,需要使用非常小的网格对其进行离散.一种较为简单粗暴的方式是对整个计算区域采用均匀细网格离散,这会造成计算区域的网格规模急剧增多,计算效率较低.亚网格技术是一种离散含电小尺寸目标的较好方式,然而,应用亚网格技术时需要谨慎处理粗-细网格交界处的场,否则会造成计算的不稳定性.2017年,Yan和Jiao^[15]通过构造对称半正定 (symmetric positive semidefinite, SPD) 算子,实现了 FDTD 亚网格数值系统的对称性,保证了计算的稳定性,但是该方法构造对称半正定算子的过程较为复杂,并且在三维情形仅考虑了细网格区域的场耦合到粗网格区域中,并未考虑粗网格区域的场耦合到细网格区域中,这会影响计算精度.2018年,Yan和Jiao^[16]通过三角形内插方法构造非对称的 FDTD 亚网格数值系统,并采用后向差分离散保证计算的稳定性,此外,还利用 Neumann 级数实现后向差分 FDTD 方法的显式迭代.然而,相比于中心差分离散,后向差分精度不足,并且 Neumann 级数展开会消耗大量的计算资源.2020年,Zeng和Jiao^[18]提出了一种系统的方法在空间和时间上构造 FDTD 亚网格 SPD 算子,保证了计算的稳定性.与 Yan 提出的 SPD 算子类似,该方法构造 SPD 算子较为复杂,并且需要在粗细网格区域设置不同的时间步长保证计算的稳定性.2017年,Bekmambetova等^[19]将耗散系统理论应用于 FDTD 方法中,并根据该理论给出了一种稳定的、易于实施的 FDTD 亚网格方案,称为悬挂变量法 (hanging variables, HV).该方法通过在粗细网格边界处引入悬挂变量,使得粗网格区域和细网格区域变为两个单独的子系统,这两个子系统之间通过悬挂变量耦合在一起.

本文将悬挂变量亚网格 (hanging variables subgridding, HVS) 算法引入到 EUS-FDTD 算法中,并从系统矩阵的对称性方面证明悬挂变量亚网格算法的稳定性,通过滤除系统矩阵中大特征对应的不稳定模式,使得整个计算区域采用均匀的大时间步迭代,提高含电小结构目标电磁仿真的计算效率.本文结构如下:第2节介绍了 EUS-FDTD 算法的基本原理和实现步骤;第3节给出了悬挂变量亚网格算法的实施过程,并通过系统矩阵的对称性证明了该方法的稳定性;第4节给出了悬挂变量亚网格算法的显式无条件稳定迭代的过程;第5节通

过线磁流在自由空间的辐射、多个介质目标以及三维含介质腔体的电磁散射特性证明了所提方法的有效性;第6节为本文的结论.

2 EUS-FDTD 方法

对于无耗情形,电场的二阶偏微分方程可写为^[1]

$$\frac{\partial^2 \{e\}}{\partial t^2} + \mathbf{S} \{e\} = \mathbf{D}_{1/\varepsilon} \{f\}, \quad (1)$$

其中 $\{e\}$ 表示计算区域中所有电场构成的向量, $\{f\}$ 为激励源项,

$$\mathbf{S} = \mathbf{D}_{1/\varepsilon} \mathbf{S}_h \mathbf{D}_{1/\mu} \mathbf{S}_e \quad (2)$$

为空间离散算子 $1/\mu \cdot (\nabla \times) \cdot 1/\varepsilon \cdot (\nabla \times)$ 形成的系统矩阵,该矩阵只和空间网格离散尺寸以及网格的介质参数相关.其中, \mathbf{S}_e 表示电场旋度离散后所构成的稀疏矩阵, \mathbf{S}_h 表示磁场旋度离散后所构成的稀疏矩阵. $\mathbf{D}_{1/\varepsilon}$ 表示元素为 $1/\varepsilon$ 的对角矩阵, $\mathbf{D}_{1/\mu}$ 表示元素为 $1/\mu$ 的对角矩阵.

对 (1) 式采用中心差分离散,可得到 FDTD 的时域步进形式为

$$\begin{aligned} \{\bar{e}\}^{n+1} = & 2\{e\}^n - \{e\}^{n-1} - \Delta t^2 \mathbf{S} \{e\}^n \\ & + \Delta t^2 \mathbf{D}_{1/\varepsilon} \{f\}^n. \end{aligned} \quad (3)$$

一般而言,系统矩阵 \mathbf{S} 中存在着稳定模式以及不稳定模式.稳定模式对应的特征值满足

$$\Delta t^2 \lambda \leq 4, \quad (4)$$

其中 Δt 为时间步长, λ 为系统矩阵 \mathbf{S} 的特征值.当所取的时间步长满足 (4) 式时,数值系统中仅存在稳定模式,迭代过程是稳定的.在网格的介质参数不变的情况下,网格尺寸越小,特征值 λ 越大,为了保证迭代过程的稳定性,需要取较小的时间步长确保系统矩阵中仅含有稳定模式,即时间步长受限空间网格尺寸.需要注意的是, (4) 式和 CFL 条件是等价的.在分析含电小尺寸目标的电磁问题时,这种限制会极大影响计算效率.

从本质上讲,传统 FDTD 方法中的 CFL 条件保证了数值系统中的所有模式均是稳定的.通常,传统 FDTD 方法在对目标进行网格离散时,仅需 $1/10$ 波长的网格离散尺度即可满足精度要求.然而,当计算区域中含有精细结构时,需要选取较小的网格离散尺寸以便精确模拟精细结构的几何

形状. 由于 CFL 条件的限制, 需要选取较小的时间步长保证 FDTD 算法时间迭代的稳定性. 此时, 小时间步长所对应的最高求解频率远大于所关心的最高求解频率, 造成了计算资源的浪费.

EUS-FDTD 方法在选取时间步长上与传统 FDTD 方法有所区别. EUS-FDTD 方法由最高求解频率并利用采样定理确定时间步长, 通过求解系统矩阵的特征值和特征模式并将大特征值 (不满足 (4) 式) 对应的特征模式滤除, 使得整个数值系统中仅含有稳定模式, 保证了大时间步的稳定迭代. 具体步骤如下:

- 1) 网格离散, 构造系统矩阵 \mathbf{S} ;
- 2) 求解系统矩阵的部分特征值和特征向量;
- 3) 根据求解的最高频率确定时间步长, 找出不满足式 (4) 的特征值以及对应的特征模式 \mathbf{V}_h ;
- 4) 滤除系统矩阵 \mathbf{S} 中的不稳定模式, 得到仅含稳定模式的系统矩阵 \mathbf{S}_l , 其中

$$\mathbf{S}_l = \mathbf{S} - \mathbf{V}_h \mathbf{V}_h^T \mathbf{S}, \quad (5)$$

\mathbf{V}_h^T 表示 \mathbf{V}_h 的转置, 在时域步进过程中, 需要将 (3) 式中的 \mathbf{S} 替换为 \mathbf{S}_l ;

5) 步骤 4) 保证了数值系统中仅含有稳定模式, 在这些稳定模式中还有着零空间模式, 这些零空间模式会影响计算结果的正确性, 因此还需要滤除零空间模式 [17]:

$$\{e\}^{n+1} = \{\tilde{e}\}^{n+1} - \mathbf{V}_h \mathbf{V}_h^T \{\tilde{e}\}^{n+1}. \quad (6)$$

通过以上步骤, 即可实现大时间步下 FDTD 算法的稳定性.

从理论上讲, 在满足采样精度的情形下, EUS-FDTD 方法时间步长的选取无限制. 但是, 由于该方法需要求解系统矩阵的部分特征值和特征向量, 当时间步长选取得很大, 那就意味着系统矩阵中的不稳定模式很多, 此时求解特征值和特征向量这一

步骤就会消耗大量的计算资源. 一般而言, 该方法更适用于含精细结构的电磁仿真中. 精细结构采用细网格离散, 其余大部分区域采用粗网格离散, 时间步长仅由粗网格尺寸确定, 此时不稳定模式仅存在细网格及其周围一层粗网格中, 通过部分特征值求解技术可快速获取系统矩阵的不稳定模式, 此时该方法的计算效率较高.

3 悬挂变量亚网格技术

3.1 实施过程

当计算区域中含有电小尺寸目标时, 采用亚网格技术对离散计算区域能够极大降低网格量, 进而提高计算效率. 此时, 在粗-细网格边界处, 由于两种网格的采样点不一致, 计算可能用到不在采样点的场值, 因此需要采用合理的插值方案将这些点的场值用已知采样点的场值表示. 本文以二维 TE 情形粗-细网格边界为例, 讨论插值方法的思想. 对于 TE 波, 电场位于面片四条棱边的中心, 磁场位于面片的中心. 粗网格尺寸为 Δ_c , 细网格尺寸为 Δ_f , Δ_c 与 Δ_f 的关系为 $\Delta_c = \text{Ratio} \cdot \Delta_f$, 其中 Ratio 为粗细网格尺寸比, 图 1 为 Ratio = 2 情形. 交界处附近粗网格的电场和磁场分别用 E_1 和 H_1 表示, 交界处附近细网格的电场和磁场分别用 e_i ($i = 1 - 7$) 和 h_i ($i = 1, 2$) 表示. 在边界处, 采用悬挂变量连接界面处粗网格和细网格中的场. 在粗网格边界处, 引入关于磁场的悬挂变量 \tilde{H}_1 . 类似地, 在细网格边界处, 引入关于磁场的悬挂变量 \tilde{h}_i ($i = 1, 2$) [19]. 在推导交界面处场的最终迭代式的过程中, 这些悬挂变量将被消去.

对于边界处的粗网格电场, 有

$$\varepsilon \frac{\partial E_1}{\partial t} = \frac{H_1 - \tilde{H}_1}{\Delta_c/2}. \quad (7)$$

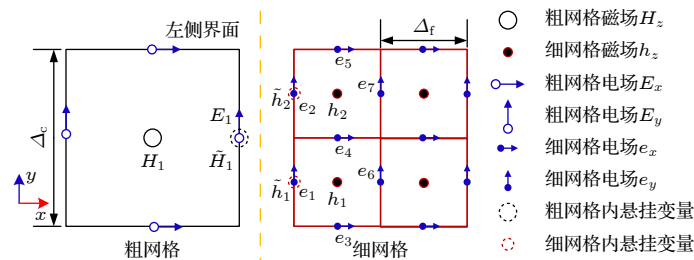


图 1 悬挂变量亚网格技术

Fig. 1. The subgridding technique of hanging variables.

类似地, 对于边界处的细网格电场, 有

$$\varepsilon \frac{\partial e_i}{\partial t} = \frac{\tilde{h}_i - h_i}{\Delta_f/2} \quad (i = 1, 2, \dots, \text{Ratio}). \quad (8)$$

对粗细网格边界处的场采用如下的插值方式^[19,20]:

$$e_1 = e_2 = \dots = e_{\text{Ratio}} = E_1, \quad (9)$$

$$\tilde{H}_1 = \frac{1}{\text{Ratio}} (\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 + \dots + \tilde{h}_{\text{Ratio}}). \quad (10)$$

由 (7) 式和 (10) 式可得

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial E_1}{\partial t} &= \frac{H_1 - \tilde{H}_1}{\Delta_c/2} \\ &= \frac{H_1 - \frac{1}{\text{Ratio}} (\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 + \dots + \tilde{h}_{\text{Ratio}})}{\Delta_c/2}. \end{aligned} \quad (11)$$

对 (8) 式中的所有项求和, 并将 (9) 式代入可得

$$\begin{aligned} \text{Ratio} \cdot \varepsilon \frac{\partial E_1}{\partial t} &= \frac{(\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 + \dots + \tilde{h}_{\text{Ratio}}) - (h_1 + h_2 + \dots + h_{\text{Ratio}})}{\Delta_f/2}. \end{aligned} \quad (12)$$

由 (12) 式得

$$\begin{aligned} &\frac{(\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 + \dots + \tilde{h}_{\text{Ratio}})}{\text{Ratio}} \\ &= \varepsilon \frac{\partial E_1}{\partial t} \cdot \frac{\Delta_f}{2} + \frac{(h_1 + h_2 + \dots + h_{\text{Ratio}})}{\text{Ratio}}. \end{aligned} \quad (13)$$

将 (13) 式代入到 (11) 式中, 可得

$$\varepsilon \frac{\partial E_1}{\partial t} = \frac{H_1 - \varepsilon \frac{\partial E_1}{\partial t} \cdot \frac{\Delta_f}{2} - \frac{(h_1 + h_2 + \dots + h_{\text{Ratio}})}{\text{Ratio}}}{\Delta_c/2}. \quad (14)$$

对 (14) 式化简可得

$$\varepsilon \frac{\partial E_1}{\partial t} = \frac{H_1 - \frac{(h_1 + h_2 + \dots + h_{\text{Ratio}})}{\text{Ratio}}}{\frac{\Delta_c}{2} \left(1 + \frac{1}{\text{Ratio}}\right)}. \quad (15)$$

粗网格上的电场 E_1 计算完成后, 可通过 (9) 式直接得到细网格边界处的电场.

当 $\text{Ratio} = 2$ 时, (15) 式可简化为

$$\varepsilon \frac{\partial E_1}{\partial t} = \frac{H_1 - \frac{(h_1 + h_2)}{2}}{\frac{\Delta_c}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right)} = S_h \{h_t\}, \quad (16)$$

其中

$$\{h_t\} = [H_1 \quad h_1 \quad h_2]^T, \quad (17)$$

$$S_h = \frac{1}{\frac{\Delta_c}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

此外, 边界处细网格的磁场可写为

$$\begin{aligned} -\mu \frac{\partial h_1}{\partial t} &= \frac{e_3 - e_4 - e_1 + e_6}{\Delta_f} = \frac{e_3 - e_4 - E_1 + e_6}{\Delta_f}, \\ -\mu \frac{\partial h_2}{\partial t} &= \frac{e_4 - e_5 - e_2 + e_7}{\Delta_f} = \frac{e_4 - e_5 - E_1 + e_7}{\Delta_f}. \end{aligned} \quad (19)$$

(19) 式可写为

$$-\mu \frac{\partial \{h_{t1}\}}{\partial t} = S_e \{e_t\}, \quad (20)$$

其中

$$\{h_{t1}\} = [h_1 \quad h_2]^T, \quad (21)$$

$$\{e_t\} = [E_1 \quad e_3 \quad e_4 \quad e_5 \quad e_6 \quad e_7]^T, \quad (22)$$

$$S_e = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\Delta_f} & \frac{1}{\Delta_f} & -\frac{1}{\Delta_f} & 0 & \frac{1}{\Delta_f} & 0 \\ -\frac{1}{\Delta_f} & 0 & \frac{1}{\Delta_f} & -\frac{1}{\Delta_f} & 0 & \frac{1}{\Delta_f} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

(16) 式和 (20) 式表示了边界处电场和磁场之间的耦合. 在其余区域, 采用和均匀网格类似的方式构造系统矩阵.

3.2 稳定性证明

根据文献^[15]可知, 若 EUS-FDTD 方法所构成的系统矩阵是对称半正定的, 则系统矩阵的特征值为非负实数, 此时我们可以根据所选择的时间步长, 滤除系统矩阵中大特征值对应的特征模式, 实现无条件稳定. 需要强调的是, 对于亚网格数值系统, 时间步长可由粗网格尺寸根据 CFL 条件确定, 此时 EUS-FDTD 算法具有较高的效率. 本节从系统矩阵的对称性角度出发, 证明悬挂变量亚网格技术的稳定性.

为了简单起见, 对图 1 中的电磁场重新编号并消除冗余编号, 得到如图 2 所示的电磁场编号.

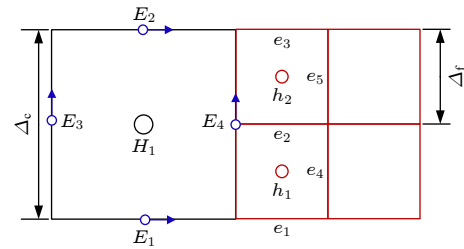


图 2 编号重排后的悬挂变量亚网格技术

Fig. 2. The subgridding technique of hanging variables after numbering rearrangement.

因此, 粗-细网格界面附近的磁场可写为

$$\begin{aligned} -\mu \frac{\partial H_1}{\partial t} &= \frac{E_1 - E_2 - E_3 + E_4}{\Delta_c}, \\ -\mu \frac{\partial h_1}{\partial t} &= \frac{e_1 - e_2 - E_4 + e_4}{\Delta_f}, \\ -\mu \frac{\partial h_2}{\partial t} &= \frac{e_2 - e_3 - E_4 + e_5}{\Delta_f}. \end{aligned} \quad (24)$$

(24) 式可写为

$$-\mu \frac{\partial}{\partial t} \{h_t\} = \mathbf{S}_e \{e_t\}, \quad (25)$$

其中

$$\begin{aligned} \{h_t\} &= [H_1 \quad h_1 \quad h_2]^T, \\ \{e_t\} &= [E_1 \quad E_2 \quad E_3 \quad E_4 \quad e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4 \quad e_5]^T, \end{aligned}$$

$$\mathbf{S}_e = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta_c} & -\frac{1}{\Delta_c} & -\frac{1}{\Delta_c} & \frac{1}{\Delta_c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\Delta_f} & \frac{1}{\Delta_f} & -\frac{1}{\Delta_f} & 0 & \frac{1}{\Delta_f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\Delta_f} & 0 & \frac{1}{\Delta_f} & -\frac{1}{\Delta_f} & 0 & \frac{1}{\Delta_f} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

粗-细网格界面附近的电场为

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial E_1}{\partial t} &= \frac{H_1}{\Delta_c}, \quad \varepsilon \frac{\partial E_2}{\partial t} = \frac{-H_1}{\Delta_c}, \quad \varepsilon \frac{\partial E_3}{\partial t} = \frac{-H_1}{\Delta_c}, \quad \varepsilon \frac{\partial E_4}{\partial t} = \frac{H_1 - (h_1 + h_2)/2}{\Delta_c/2 \cdot (1 + 1/2)}, \\ \varepsilon \frac{\partial e_1}{\partial t} &= \frac{h_1}{\Delta_f}, \quad \varepsilon \frac{\partial e_2}{\partial t} = \frac{-h_1 + h_2}{\Delta_f}, \quad \varepsilon \frac{\partial e_3}{\partial t} = \frac{-h_2}{\Delta_f}, \quad \varepsilon \frac{\partial e_4}{\partial t} = \frac{h_1}{\Delta_f}, \quad \varepsilon \frac{\partial e_5}{\partial t} = \frac{h_2}{\Delta_f}. \end{aligned} \quad (27)$$

(27) 式可写为

$$\varepsilon \frac{\partial \{e_t\}}{\partial t} = \mathbf{S}_h \{h_t\}, \quad (28)$$

其中

$$\mathbf{S}_h = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta_c} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\Delta_c} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\Delta_c} & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\Delta_c} & -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\Delta_c} & -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\Delta_c} \\ 0 & \frac{1}{\Delta_f} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\Delta_f} & \frac{1}{\Delta_f} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\Delta_f} \\ 0 & \frac{1}{\Delta_f} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta_f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta_c} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\Delta_c} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\Delta_c} & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\Delta_c} & -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\Delta_f} & -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\Delta_f} \\ 0 & \frac{1}{\Delta_f} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\Delta_f} & \frac{1}{\Delta_f} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\Delta_f} \\ 0 & \frac{1}{\Delta_f} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta_f} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

由 (26) 式和 (29) 式可知,

$$\mathbf{S}_h \neq \mathbf{S}_e^T. \quad (30)$$

因此, 最终所构成的系统矩阵为非对称的. 接下来, 将给出系统矩阵的对称化方法.

(29) 式可写为

$$\mathbf{S}_h = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta_c} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\Delta_c} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\Delta_c} & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\Delta_c} & -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\Delta_f} & -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\Delta_f} \\ 0 & \frac{1}{\Delta_f} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\Delta_f} & \frac{1}{\Delta_f} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\Delta_f} \\ 0 & \frac{1}{\Delta_f} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta_f} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_p \mathbf{S}'_h, \quad (31)$$

其中

$$\mathbf{D}_p = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 4/3 & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$\mathbf{S}'_h = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta_c} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\Delta_c} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\Delta_c} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\Delta_c} & -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\Delta_f} & -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\Delta_f} \\ 0 & \frac{1}{\Delta_f} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\Delta_f} & \frac{1}{\Delta_f} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\Delta_f} \\ 0 & \frac{1}{\Delta_f} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta_f} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

令

$$\hat{e}_i = \frac{1}{2} e_i, \quad \hat{h}_i = \frac{1}{2} h_i. \quad (34)$$

将其代入到 (24) 式和 (27) 式中, 此时, (26) 式重写为

$$\hat{\mathbf{S}}_e = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta_c} & -\frac{1}{\Delta_c} & -\frac{1}{\Delta_c} & \frac{1}{\Delta_c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \frac{1}{\Delta_f} & \frac{1}{\Delta_f} & -\frac{1}{\Delta_f} & 0 & \frac{1}{\Delta_f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \frac{1}{\Delta_f} & 0 & \frac{1}{\Delta_f} & -\frac{1}{\Delta_f} & 0 & \frac{1}{\Delta_f} \end{bmatrix}. \quad (35)$$

(33) 式重写为

$$\hat{\mathbf{S}}'_h = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta_c} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\Delta_c} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\Delta_c} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\Delta_c} & -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Delta_f} & -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Delta_f} \\ 0 & \frac{1}{\Delta_f} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\Delta_f} & \frac{1}{\Delta_f} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\Delta_f} \\ 0 & \frac{1}{\Delta_f} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta_f} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

由 (35) 式和 (36) 式可知,

$$\hat{\mathbf{S}}'_h = \hat{\mathbf{S}}_e^T. \quad (37)$$

因此, 新的数值系统可写为

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{D}_{1/\varepsilon} \mathbf{D}_p \hat{\mathbf{S}}'_h \mathbf{D}_{1/\mu} \hat{\mathbf{S}}_e. \quad (38)$$

4 显式无条件稳定迭代

根据第 3 节的推导, 此时, 关于电场的二阶偏微分方程可写为

$$\frac{\partial^2 \{\hat{e}\}}{\partial t^2} + \hat{\mathbf{S}} \{\hat{e}\} = \mathbf{D}_{1/\varepsilon} \{f\}, \quad (39)$$

其中 $\{\hat{e}\}$ 为计算区域中所有电场 \hat{e}_i 构成的向量, (39) 式可进一步写为

$$D_p^{-1} D_\varepsilon \frac{\partial^2 \{\hat{e}\}}{\partial t^2} + \hat{S}'_h D_{1/\mu} \hat{S}_e \{\hat{e}\} = D_p^{-1} \{f\}. \quad (40)$$

根据 (37) 式可知, $(\hat{S}'_h D_{1/\mu} \hat{S}_e)^T = \hat{S}_e^T D_{1/\mu}^T \hat{S}_h^T = \hat{S}'_h D_{1/\mu} \hat{S}_e$, 因此上述亚网格的数值系统是由对称半正定特征值问题所支配, 如下:

$$D_p^{-1} D_\varepsilon V = \lambda S_{\text{new}} V, \quad (41)$$

其中 $S_{\text{new}} = \hat{S}'_h D_{1/\mu} \hat{S}_e$, V 为特征向量. 因为 S_{new} 为对称半正定矩阵, 对角矩阵 $D_p^{-1} D_\varepsilon$ 为正定矩阵, 所以 (41) 式中的特征值必定为非负实数. 通过求解系统矩阵方程的特征值和特征向量, 根据 (4) 式获得数值系统中的不稳定模式 V_h 并将其滤除, 使得时间迭代步长与细网格尺寸无关, 保证数值迭代的显式无条件稳定性. 具体迭代过程如下 [21]:

$$\begin{aligned} \{\hat{e}\}^{n+1} &= 2\{\hat{e}\}^n - \{\hat{e}\}^{n-1} - \Delta t^2 D_{1/\varepsilon} D_p S_{\text{new}} \\ &\quad \times (I - V_h V_h^T D_p^{-1} D_\varepsilon) \{\hat{e}\}^n \\ &\quad + \Delta t^2 D_{1/\varepsilon} \{f\}^n. \end{aligned} \quad (42)$$

在每一步迭代完成后还需要滤除零空间模式, 即

$$\{\hat{e}\}^{n+1} = \{\hat{e}\}^{n+1} - V_h V_h^T D_p^{-1} D_\varepsilon \{\hat{e}\}^{n+1}. \quad (43)$$

需要注意的是, 在电场 \hat{e}_i 或磁场 \hat{h}_i 求出之后, 需要根据 (34) 式求出原始系统中的电场和磁场.

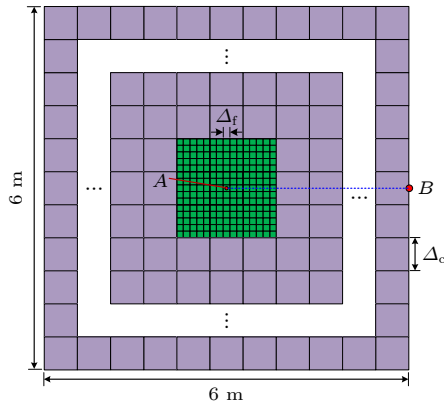


图 3 计算模型示意图

Fig. 3. The schematic diagram of calculation model.

5 数值算例

5.1 线磁流在自由空间的辐射

二维计算区域的大小为 6 m×6 m, 区域外采用吸收边界截断. 在计算区域中心处设置了一个频率为 $f = 0.3$ GHz 的线磁流源. 该计算模型采用了基于悬挂变量的亚网格方法进行离散, 其中粗网格

尺寸为 $\Delta_c = 0.05$ m, 线磁流源周围 0.15 m 的方形区域内采用细网格离散, 粗细网格比为 Ratio = 5, 即细网格尺寸为 $\Delta_f = 0.01$ m, 计算模型示意如图 3 所示. 在本例中, 采用了解析解 (analytical)、均匀细网格的传统 FDTD 方法 (uniform FDTD), HVS-FDTD 及 HVS-EUS-FDTD 计算了直线 AB 上采样点的磁场强度, 以上四种方法的计算结果如图 4 所示. 由图 4 可知, 三种数值方法与解析解的结果吻合得很好. 此外, 表 1 给出了三种数值方法的计算时间、时间步长和内存占用情况. uniform FDTD 和 HVS-FDTD 需要采用较小的时间步长进行迭代以保证计算的稳定性, 而 HVS-EUS-FDTD 可采用较大的时间步长. uniform FDTD 方法需要 2295.5 s 完成仿真, 采用悬挂变量亚网格算法进行离散后, HVS-FDTD 仅需要 17.45 s 即可完成仿真. 更进一步, 将悬挂变量亚网格算法引入到 EUS-FDTD 算法, HVS-EUS-FDTD 方法仅需要 5.35 s 即可完成整个求解过程, 其中特征值求解时间为 0.05 s, 迭代时间 5.30 s. 这是因为相比于 uniform FDTD 方法, HVS-FDTD 采用亚网格离散, 极大的降低了网格规模, 提高了计算效率. 而 HVS-EUS-FDTD 在 HVS-FDTD 方法的基础上,

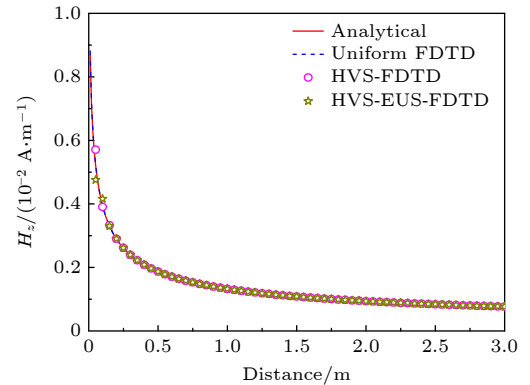


图 4 直线 AB 上采样点的磁场强度

Fig. 4. Magnetic field intensity of sampling points on line AB.

表 1 三种数值算法的计算时间比较

Table 1. Comparison of calculation times of three numerical algorithms.

方法	uniform FDTD	HVS-FDTD	HVS-EUS-FDTD
时间/s	2295.5	17.45	0.05+5.3
时间步长/(10 ⁻¹¹ s)	1.67	1.67	8.33
迭代步数	50000	50000	10000
内存/MB	136.1	3.2	4.3

滤除系统矩阵中的不稳定模式,使得整个迭代过程可以采用均匀的大时间步进行仿真,进一步提高了计算效率.从 uniform FDTD 和 HVS-FDTD 方法的内存占用情况也可以看出,亚网格方案极大降低了内存,相比于 HVS-FDTD 方法, HVS-EUS-FDTD 方法需要额外存储不稳定模式,因此 HVS-EUS-FDTD 方法的内存占用量比 HVS-FDTD 方法的稍大.图 5 还给出了 HVS-EUS-FDTD 方法中大特征值的分布,在本例中特征值 $\lambda > 4$ 的特征值有 210 个,通过将其对应的特征模式滤除即可实现整个数值系统的无条件稳定性.

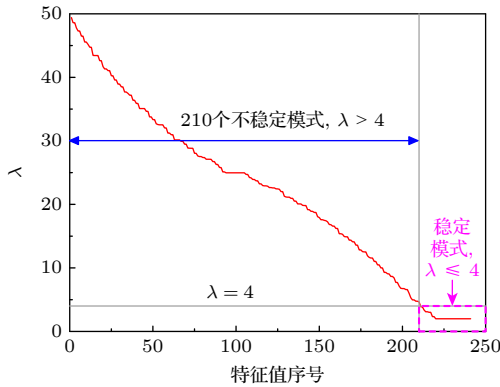


图 5 特征值分布

Fig. 5. The distribution of eigenvalues.

5.2 多个介质目标的电磁散射特性

本例计算了 TE 情形多个无限长介质圆柱的散射问题.计算模型如图 6 所示.在计算区域中有 9 个相对介电常数 $\epsilon_r = 25$ 的无限长介质圆柱,圆柱的直径 $d = 0.05$ m,圆柱之间的距离均为 $b = 0.1$ m.入射源为线磁流源,源的形式为微分高斯脉冲,脉冲宽度 $\tau = 1$ ns.在计算区域内设置有两个监测点,分别为 P_1 和 P_2 .加源点以及监测点位置如图 6 所示.本例中,采用了 uniform FDTD, HVS-FDTD 以及 HVS-EUS-FDTD 三种方法对该模型进行仿真.由于计算区域中存在介质,为了提高建模精度,需要采用细网格对介质区域进行网格离散.对于 uniform FDTD 方法,采用均匀细网格对该模型进行离散,细网格尺寸为 $\Delta_f = 0.002$ m;对于 HVS-FDTD 以及 HVS-EUS-FDTD 方法,采用悬挂变量亚网格方法对该模型进行离散,对于单个介质目标的网格离散示意图如图 7 所示.对于悬挂变量亚网格,粗网格尺寸 $\Delta_c = 0.01$ m,细网格尺寸与 uniform FDTD 方法的相同,为 $\Delta_f = 0.002$ m.以

上三种方法所获得的监测点 P_1 和 P_2 的时域波形如图 8 所示,可以看到, HVS-FDTD 以及 HVS-EUS-FDTD 方法的结果与 uniform FDTD 方法的结果吻合得很好,证明了所提方法的精度.为了获得稳定的仿真结果, uniform FDTD 方法的时间步长需为 3.33×10^{-12} s,完成整个仿真需花费 91.36 s; HVS-FDTD 方法的计算区域中有细网格的存在,其时间步长和 uniform FDTD 的相同,但亚网格技术降低了网格规模,使得 HVS-FDTD 方法仅需 2.19 s 即可完成整个仿真; HVS-EUS-FDTD 方法通过滤除 HVS-FDTD 方法的不稳定模式,保证了整个计算区域采用了统一的大时间步进行迭代,减少了迭代步数,使得仅需 1.07 s 即可完成计算,其中特征值求解花费 0.29 s,时域迭代花费 0.78 s.图 9 给出了时间步长扩大 2 倍情形 uniform FDTD 和 HVS-FDTD 方法所计算的监测点时域波形,可以看到,此时 uniform FDTD 和 HVS-FDTD 方法不稳定.在内存消耗方面, uniform FDTD 方法消耗的内存最多, HVS-FDTD 方法消耗的最少, HVS-EUS-FDTD 方法消耗的内存比 HVS-FDTD 方法稍大.三种方法的详细计算参数如表 2 所列.从以

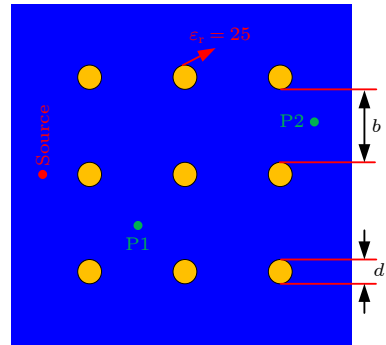


图 6 多个介质目标计算模型

Fig. 6. Calculation model for multi medium targets.

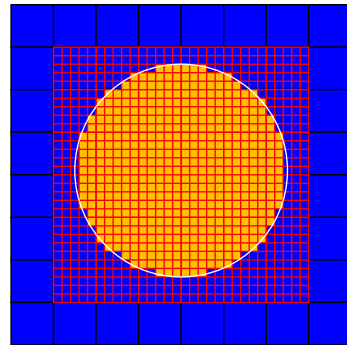


图 7 悬挂变量亚网格离散模型

Fig. 7. Subgridding discrete model with hanging variables.

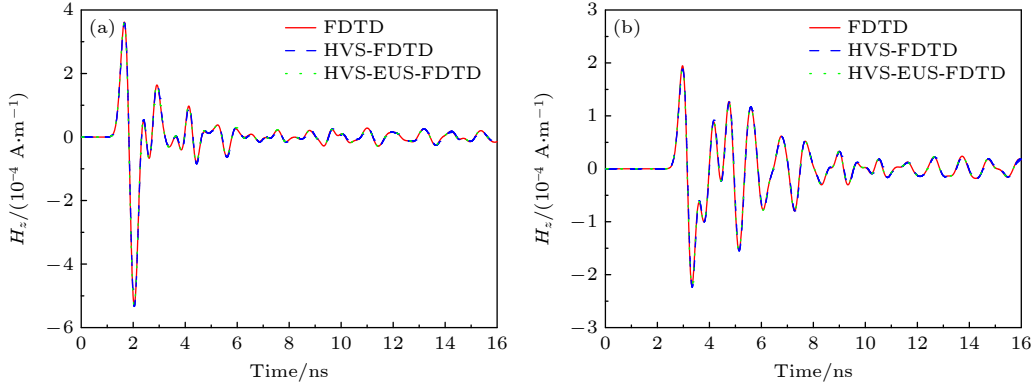

 图 8 监测点时域波形 (a) P_1 ; (b) P_2

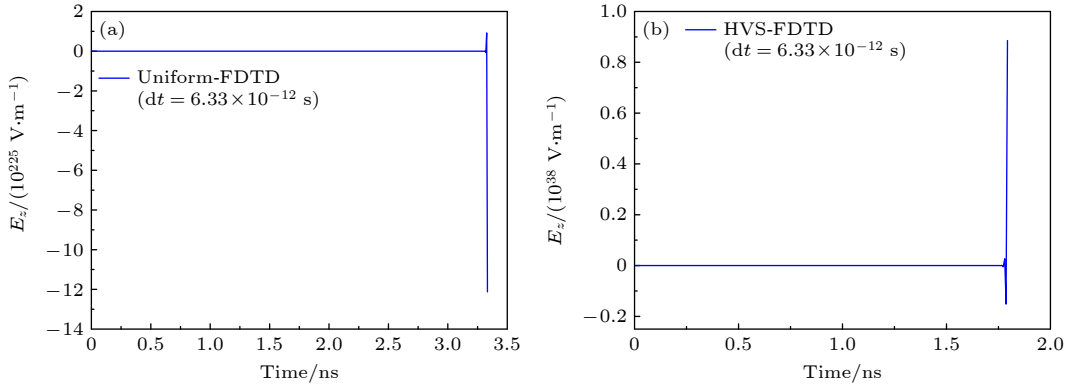
 Fig. 8. Time domain waveform of monitoring points: (a) P_1 ; (b) P_2 .


图 9 大时间步情形 Uniform-FDTD 与 HVS-FDTD 算法的时域波形 (a) Uniform-FDTD; (b) HVS-FDTD

Fig. 9. Time domain waveforms of Uniform-FDTD and HVS-FDTD algorithms with large time steps: (a) Uniform-FDTD; (b) HVS-FDTD.

上可知, HVS-EUS-FDTD 相比于 uniform FDTD 以及 HVS-FDTD 方法有更高的计算效率.

表 2 三种数值算法的计算参数比较

Table 2. Comparison of calculation parameters of three numerical algorithms.

	Uniform FDTD	HVS- FDTD	HVS-EUS- FDTD
时间/s	91.36	2.19	0.29+0.78
时间步长/(10^{-12} s)	3.33	3.33	16.7
迭代步数	5000	5000	1000
内存/MB	86	7.2	11.6

5.3 三维含介质 PEC 腔体

三维 PEC 腔体尺寸为 $2\text{ m} \times 2\text{ m} \times 2\text{ m}$, 腔体中心区域含一块大小为 $0.05\text{ m} \times 0.05\text{ m} \times 0.05\text{ m}$ 、介质参数为 $\epsilon_r = 20$ 的介质块, 计算模型如图 10 所示. 在 PEC 腔体内部 $(0.2\text{ m}, 0.2\text{ m}, 0.225\text{ m})$ 处设置 z 方向的电偶极子源, 其形式为微分高斯脉冲, 脉冲宽度 $\tau = 4\text{ ns}$. 在 $(0.7\text{ m}, 0.7\text{ m}, 0.725\text{ m})$ 处设置一个监测点. 本例也采用了 uniform FDTD, HVS-FDTD 以及 HVS-EUS-FDTD 三种方法对

该模型进行仿真. 对于 uniform FDTD 方法, 采用均匀细网格对该模型进行离散, 细网格尺寸为 $\Delta_f = 0.01\text{ m}$; 对于 HVS-FDTD 以及 HVS-EUS-FDTD 方法, 采用悬挂变量亚网格方法对该模型进行离散, 介质块为细网格, 其余区域为粗网格, 其中粗网格尺寸为 $\Delta_c = 0.05\text{ m}$, 细网格尺寸与 uniform FDTD 方法的相同, 即 $\Delta_f = 0.01\text{ m}$. 以上三种方法所获得的监测点的时域波形如图 11 所示.

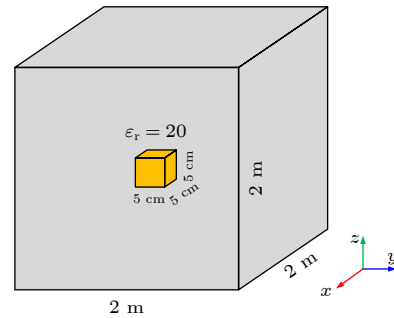


图 10 三维含介质 PEC 腔体计算模型

Fig. 10. The computational model for 3-D PEC cavity containing a dielectric.

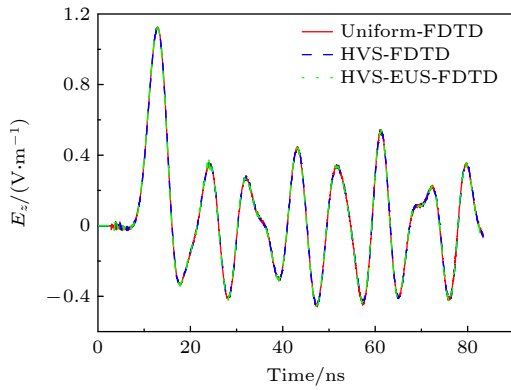


图 11 监测点时域波形

Fig. 11. Time domain waveform of monitoring the point.

可以看到, 三种方法的结果符合得很好, 证明了所提方法的精度. 为了获得稳定的仿真结果, uniform FDTD 方法的时间步长需为 1.67×10^{-11} s, 完成整个仿真需花费 28816.8 s; HVS-FDTD 方法的计算区域中有细网格的存在, 其时间步长和 uniform FDTD 的相同, 但亚网格技术降低了网格规模, 使得 HVS-FDTD 方法仅需 314.2 s 即可完成整个仿真; HVS-EUS-FDTD 方法通过滤除 HVS-FDTD 方法的不稳定模式, 保证了整个计算区域采用了统一的大时间步进行迭代, 减少了迭代步数, 使得仅需 64.71 s 即可完成计算. uniform FDTD 方法消耗的内存最多, HVS-FDTD 方法消耗的最少, HVS-EUS-FDTD 方法消耗的内存比 HVS-FDTD 方法稍大. 三种方法的详细计算参数如表 3 所列. 从以上可知, 在三维情形, HVS-EUS-FDTD 相比于 uniform FDTD 以及 HVS-FDTD 的计算效率提升更明显.

表 3 三种数值算法的计算参数比较

Table 3. Comparison of calculation parameters of three numerical algorithms.

	Uniform FDTD	HVS- FDTD	HVS-EUS- FDTD
时间/s	28816.8	314.2	0.01+64.7
时间步长/(10^{-11} s)	1.67	1.67	8.33
迭代步数	5000	5000	1000
内存/MB	9773	321	342

6 结 论

本文提出了基于悬挂变量的 EUS-FDTD 亚

网格算法用于高效高精度分析含精细结构的电磁特性. 本文给出了悬挂变量亚网格算法在边界处的场值交换过程, 从系统矩阵对称性出发证明了悬挂变量亚网格算法的稳定性, 并通过滤除亚网格数值系统中的不稳定模式实现显式无条件稳定迭代. 该方法具有实施过程简单、精度高、效率高的优势. 本文所给的三个数值算例表明了所提方法的有效性.

参考文献

- [1] Tan E 2020 *Prog. Electromagn. Res.* **168** 39
- [2] He X B, Wei B, Fan K H, Li Y W, Wei X L 2019 *Chin. Phys. B* **28** 074102
- [3] Gedney S 2011 *Introduction to the Finite-difference Time-domain (FDTD) Method for Electromagnetics* (Berlin: Springer Nature) pp1–11
- [4] Namiki T 1999 *IEEE Trans Microwave Theory Tech.* **47** 2003
- [5] Zheng F H, Chen Z Z 2001 *IEEE Trans Microwave Theory Tech.* **49** 1006
- [6] Chen J, Hao G C, Liu Q H 2017 *IEEE Trans. Electromagn. Compat.* **59** 1218
- [7] Shibayama J, Muraki M, Yamauchi J, Nakano H 2005 *Electron. Lett.* **41** 1
- [8] Ahmed I, Chua E K, Li E P 2010 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **58** 3983
- [9] Ahmed I, Khoo E H, Li E P 2013 *IEEE Microwave Wireless Compon. Lett.* **23** 306
- [10] Sun C, Trueman C W 2003 *Electron. Lett.* **39** 595
- [11] Jiang H L, Cui T J 2019 *IEEE Antennas Wireless Propag. Lett.* **18** 698
- [12] Chen J, Li J X, Liu Q H 2017 *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **65** 3689
- [13] Mai H X, Chen J, Yu X M, Zhang A X 2020 *Int. J. RF Microwave Comput. Aided Eng.* **30** e22166
- [14] Gaffar M, Jiao D 2015 *IEEE Trans Microwave Theory Tech.* **63** 4215
- [15] Yan J, Jiao D 2017 *IEEE Trans Microwave Theory Tech.* **65** 5084
- [16] Yan J, Jiao D 2018 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **66** 4137
- [17] Yan J, Jiao D 2017 *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **65** 2698
- [18] Zeng K Y, Jiao D 2020 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **68** 3047
- [19] Bekmambetova F, Zhang X Y, Triverio P 2017 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **65** 751
- [20] Zhang X Y, Bekmambetova F, Triverio P 2018 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **66** 827
- [21] Lee W 2018 *IEEE J. Multiscale Multiphys. Comput. Tech.* **3** 16

Explicit and unconditionally stable finite-difference time-domain subgridding algorithm based on hanging variables^{*}

He Xin-Bo[†] Wei Bing

(School of Physics, Xidian University, Xi'an 710071, China)

(Received 16 November 2023; revised manuscript received 29 December 2023)

Abstract

Due to the limitation of the stability condition, the finite-difference time-domain (FDTD) method cannot efficiently deal with electromagnetic problems containing fine structures. The explicit and unconditionally stable (EUS) FDTD method can eliminate the constraint of the stability condition and improve the simulation efficiency of fine structures by filtering out the unstable modes for the system matrix. However, the EUS-FDTD method needs to solve the eigenvalues of the numerical system matrix, and the symmetry of the numerical system matrix needs to be ensured when the subgridding scheme is used to discretize targets containing fine structures. The existing EUS-FDTD subgridding method encounters some problems such as complex implementation and insufficient accuracy. In order to solve the above problems, in this work, the hanging variables subgridding (HVS) algorithm is applied to the EUS-FDTD algorithm. Starting from the symmetry of the system matrix, the stability of the hanging variables subgridding algorithm is proven, and a high-precision, stable, and easy-to-implement HVS-EUS-FDTD scheme is proposed. Numerical examples of the radiation of linear magnetic currents in free space, electromagnetic scattering of multiple dielectric objects, and a three-dimensional cavity containing a medium demonstrate the stability, high accuracy and efficiency of the proposed method. Numerical experiments show that the computational efficiency of the HVS-EUS-FDTD algorithm can be improved hundreds of times compared with that of the uniform fine grid FDTD algorithm, and the highest computational efficiency can be improved up to ratio (the size ratio of coarse grid to fine grid) times compared with that of the HVS-FDTD algorithm.

Keywords: finite-difference time-domain, explicit and unconditionally stable, hanging variables, fine structures

PACS: 02.70.Bf, 03.50.De, 41.20.Jb

DOI: [10.7498/aps.73.20231813](https://doi.org/10.7498/aps.73.20231813)

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 62201411, 62371378).

[†] Corresponding author. E-mail: hexinbo@xidian.edu.cn

基于悬挂变量的显式无条件稳定时域有限差分亚网格算法

何欣波 魏兵

Explicit and unconditionally stable finite-difference time-domain subgridding algorithm based on hanging variables

He Xin-Bo Wei Bing

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 73, 080202 (2024) DOI: 10.7498/aps.73.20231813

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231813>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于时域有限差分法的核壳双金属纳米颗粒光吸收率反转行为

Reversal behavior of optical absorption rate of bimetallic core-shell nanoparticles based on finite-difference time-domain method

物理学报. 2021, 70(20): 207801 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210602>

非水平海底情况下海底地震波时域有限差分数值模拟

Seabed seismic wave simulation by finite difference time domain scheme in marine environment with complex seafloor topography

物理学报. 2021, 70(22): 224303 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210634>

一种新的基于频域有限差分方法的小周期有机太阳能电池的光电特性

Optical and electrical properties of short-pitch solar cells with finite-difference frequency-domain method

物理学报. 2018, 67(17): 178102 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180821>

适用于一维精细结构电磁目标模拟的通用HIE-FDTD方法及程序实现

Universal HIE-FDTD method and program implementation for one-dimensional fine structure electromagnetic target simulation

物理学报. 2022, 71(18): 184101 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220695>

基于四盘形谐振腔耦合波导的三波段等离子体诱导透明效应

Three-band plasmon induced transparency effect based on four-disk resonator coupled waveguide system

物理学报. 2022, 71(24): 244201 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221397>

基于石墨烯纳米条波导边耦合矩形腔的等离子体诱导透明效应

Plasmon induced transparency effect based on graphene nanoribbon waveguide side-coupled with rectangle cavities system

物理学报. 2022, 71(2): 024201 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211397>