

专题: 无序合金的序调控•封面文章

基于未训练神经网络的分数傅里叶变换成像*

黄宇航¹⁾²⁾ 陈理想^{1)†}

1) (厦门大学物理学系, 厦门 361005)

2) (厦门大学人工智能研究院, 厦门 361005)

(2024 年 1 月 8 日收到; 2024 年 1 月 25 日收到修改稿)

分数傅里叶变换近年来被越来越多地用于光学成像领域, 分数傅里叶变换情况下的相位恢复被广泛研究. 另外, 深度学习已经被广泛运用于各种光学计算成像中, 但由于在采集数据时光路本身的环境不会产生太大变化, 往往难以取得质量和数量足够的标记数据来训练, 并且训练时间也比较长. 近年来, 基于物理规律驱动的未训练神经网络用于计算成像的方法逐渐引起了研究人员的兴趣. 本文将这种未训练的神经网络深度学习应用于分数傅里叶变换成像, 通过将神经网络和光学模型相结合的方式完成分数傅里叶变换的相位恢复. 数值仿真和光学实验证明, 仅需 2000 次迭代, 该网络框架就能完成不同阶数的分数傅里叶变换重建, 包括强度物体和相位物体. 实验结果表明, 重建图像及原始图像的相似性, 即归一化互相关系数可达 99.7%. 因此, 本工作框架为分数傅里叶变换的重建提供了一种新方法.

关键词: 分数傅里叶变换, 深度学习, 神经网络, 相位恢复**PACS:** 42.30.Rx, 07.05.Mh, 42.30.Kq**DOI:** 10.7498/aps.73.20240050**CSTR:**

1 引言

神经网络自诞生起就受到了学术界的广泛关注, 深度学习被陆续用在各种研究领域. 近年来, 基于深度学习的光学计算成像被广泛研究, 并已经证明神经网络可以用于计算鬼影成像^[1]、数字全息成像^[2,3]、散射介质成像^[4,5]、傅里叶叠层显微成像^[6,7]等一系列的光学成像. 其中, 定量相位成像在光学计算成像中是一个被广泛研究的领域. 因为光场同时具有相位信息和强度信息, 但是 CCD 等感光器件只能收集强度信号, 导致相位信息丢失. 因此如何更好地进行相位成像是一个值得研究和讨论的课题. 相位成像的研究历史很长, 在 1972 年, Gerchberg-Saxton (GS) 算法就已经被提出用于从已知的强度信息中恢复相位信息^[8], 后来

又提出了强度输运方程 (TIE) 来从强度信息中提取相位信息, 恢复效果优于 GS 算法^[9], 但是需要多张强度图像. 再后来, 研究人员陆续提出了诸如杨顾算法、数字全息等多种相位恢复算法.

2017 年, 深度学习首次运用在光学计算成像, Sinha 等^[10]证明了神经网络可以被用来训练作定量相位成像. 从此之后, 深度学习在光学计算成像中得到了广泛应用. 然而, 传统的深度学习有一个问题, 那就是训练时间实在太长, 往往需要十几个小时甚至几天的时间; 另一方面, 在实际应用中, 很难取得大量的训练集, 而神经网络的训练效果又取决于训练集的质量和数量. 如果训练集数据不足或者验证集图像和训练集之间存在显著差异, 则会导致神经网络性能较差. 因此, 使用更少的数据集训练具有更好鲁棒性的神经网络是至关重要的. 深度图像先验 (DIP) 概念的提出^[11], 为深度学习应

* 国家自然科学基金重点项目 (批准号: 12034016) 和福建省自然科学基金 (批准号: 2021J02002) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: chenlx@xmu.edu.cn

用于计算成像问题提供了新思路. 特别是 2020 年, Wang 等^[12] 率先利用物理定律驱动的未训练神经网络实现了对图像的恢复. 在他们的框架中, 最重要的特点是用深度神经网络嵌套衍射模型, 不用经过预训练就能对衍射图像进行修复. 本文将该方法应用于分数傅里叶变换成像, 通过将神经网络和光学模型相结合的方式完成分数傅里叶变换的相位恢复. 在实验上, 同时实现了对强度物体和相位物体的计算重建和恢复成像, 并利用结构相似性这个参数刻画了该计算成像系统的稳定性和良好性能.

2 分数傅里叶变换基本原理

2.1 理论模型

分数傅里叶变换是傅里叶变换的一种广义形式, 傅里叶变换在信号处理和光学领域有着十分广泛的应用, 可以将时域或空域的输入信号转换为其傅里叶谱域中的纯粹空间频率或时频分布. 但是, 如果我们不执行完整的傅里叶变换, 而是执行例如阶数在 0—1 之间的分数阶傅里叶变换, 输出信号就会变成同时具有空/时域信息和频域信息的混合信号. 分数傅里叶变换长期以来在通信领域得到广泛应用, 近几十年来, 它引起了二维图像处理领域研究人员的注意. 在光学领域, Mendlovic 和 Ozaktas^[13] 于 1993 年首次将分数傅里叶变换引入光学领域, 并采用折射率渐变介质光学理论给出了这一概念在光学系统中的解释. Lohmann^[14] 采用 wigner 分布函数定义了分数傅里叶变换, 并提出了一种利用透镜进行分数傅里叶变换的方法. 基于分数傅里叶变换的相位恢复的研究也随之推进, 许多研究人员对分数阶傅里叶变换的相位恢复算法进行了研究. Zalevsky 等^[15] 于 1996 年首次将傅里叶 GS 迭代算法扩展到分数阶傅里叶域, 并着重分析了傅里叶 GS 迭代与分数阶傅里叶 GS 迭代在收敛性上的差异, 后来, 一些研究人员在 GS 算法的基础上进行改进和创新.

最近, 深度学习在计算成像领域中得到了广泛的应用, 但其尚未应用于分数傅里叶变换的相位成像, 这是一个值得关注和研究的课题. 本文将深度学习用于分数傅里叶变换的相位恢复, 与传统的深度学习不同的是, 我们使用未训练的神经网络来对分数傅里叶变换进行相位恢复. 通过将传统的神经网络和物理模型相结合来重建图像. 仅用一张相位

物体经过分数傅里叶变换后所得到的强度图像, 通过神经网络和分数傅里叶光学模型的相互作用, 对神经网络进行训练, 最终神经网络输出为原本的相位物体的图像.

在此, 首先探讨分数傅里叶变换的定义式, 一维分数傅里叶变换的数学表达式为^[16]

$$F(f_x) = \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \times \exp\left[\frac{j(f_x^2 + x^2)}{2\tan\alpha} - \frac{jxf_x}{\sin\alpha}\right] dx. \quad (1)$$

将其推广到二维形式^[17]:

$$F(f_x, f_y) = \frac{\sqrt{(1-j\cot\alpha)(1-j\cot\beta)}}{2\pi} \times \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp\left[\frac{j(f_x^2 + x^2)}{2\tan\alpha} - \frac{jxf_x}{\sin\alpha}\right] \times \exp\left[\frac{j(f_y^2 + y^2)}{2\tan\beta} - \frac{jyf_y}{\sin\beta}\right] dx dy. \quad (2)$$

其中, $\alpha = \frac{p_1}{2}\pi$, $\beta = \frac{p_2}{2}\pi$, p_1, p_2 分别为 x 方向和 y 方向分数傅里叶变换的阶数, 当 $p_1 = p_2 = p$ 时, x 方向和 y 方向分数傅里叶变换的阶数相同, 则 $\alpha = \beta = \phi$, 此时公式可变为^[18]

$$F(f_x, f_y) = \frac{1-j\cot\phi}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \times \exp\left[\frac{j(f_x^2 + x^2 + f_y^2 + y^2)}{2\tan\phi} - \frac{j(xf_x + yf_y)}{\sin\phi}\right] dx dy. \quad (3)$$

当 $p_1 = p_2 = 1$ 时则为常规傅里叶变换. 0.565 — — — — 0.565

对于相位物体 $\varphi(x, y)$, 由相干平面波照射, 其正后方的复振幅可以写成 $U_0(x, y) = \exp[j\varphi(x, y)]$. 光学的分数傅里叶变换是使用透镜实现的, 光学分数傅里叶变换公式可以写成^[19]:

$$1234 \quad (4)$$

其中 $U_0(x, y)$ 为输入平面的光场, 所需要的物体信息被加载在了输入平面波的相位上, $U_P(x_1, y_1)$ 为输出平面的光场, f_e 为标准焦距, $\phi = \frac{p\pi}{2}$, p 为分数傅里叶变换的阶数, 当 $p = 1$ 时就是标准的傅里叶变换.

2.2 光学模型

由透镜的光学特性可知, 透镜可以完成光学傅里叶变换, 如图 1 所示 [20].

$$U(x_1, y_1) = \frac{\exp(jkd_1)}{j\lambda d_1} \int \int_{-\infty}^{+\infty} U(x_0, y_0) \times \exp\left\{\frac{jk}{2d_1} [(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2]\right\} dx_0 dy_0, \quad (5)$$

$$U'(x_1, y_1) = U(x_1, y_1) \exp\left[-j\frac{k}{2f} (x_1^2 + y_1^2)\right], \quad (6)$$

$$U(x_2, y_2) = \frac{\exp(jkd_2)}{j\lambda d_2} \int \int_{-\infty}^{+\infty} U'(x_1, y_1) \times \exp\left\{\frac{jk}{2d_2} [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]\right\} dx_1 dy_1. \quad (7)$$

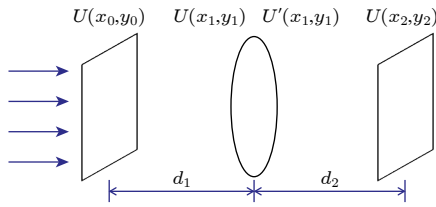


图 1 透镜的傅里叶变换光路图

Fig. 1. Fourier transform optical path diagram of lens.

当 $d_1 = d_2 = f$ 时, 从 $U(x_0, y_0)$ 到 $U(x_2, y_2)$ 这个过程就是傅里叶变换, 如果这个等式不成立, 就会产生分数傅里叶变换. 当 $d_1 = d_2 = f_e \tan(\varphi/2)$, $f = f_e / \sin(\varphi)$ 时, $\phi = \frac{p\pi}{2}$, 此时就会产生分数阶为 p 的分数傅里叶变换 [20].

在分数傅里叶变换输出面的位置放置一台 CCD 相机, 它所接受到的光强信号为

$$I = |U(x_2, y_2)|^2 = F(\varphi). \quad (8)$$

3 计算机模拟仿真

3.1 网络框架

如果采用传统的深度学习, 我们需要采集大量标记数据作为训练集, 这样神经网络才能学习从分数傅里叶变换的输出平面收集的光强信号与原始相位图像之间的映射函数 R , 通过训练神经网络, 可以优化神经网络的网络权重和偏置因子:

$$\arg \min \|R(I) - \varphi\|^2, \quad (9)$$

其中“arg min”表示求解最小化问题的过程, R 为神经网络的网络权重和偏置因子所定义的泛化函数 [21].

将输出面上的光强 I 输入到神经网络中, 神经网络输出相位 φ , 再将 φ 输入到分数傅里叶变换的光学模型中, 光学模型的输出为光强 I' , 让光强和神经网络的输入进行均方差, 通过迭代训练优化神经网络的网络权重和偏置因子:

$$\arg \min \|F(R(I)) - I\|^2, \quad (10)$$

其中 F 为分数傅里叶变换的物理过程, R 为神经网络的网络权重和偏置因子所定义的映射函数. 这种网络的框架如图 2 所示.

在我们的方案中, 神经网络由编码器和解码器两部分组成, 这种 U 型的神经网络最初用于处理医学中的图像分割问题 [22], 后来在引进光学计算成像领域后被广泛使用. 本文的神经网络分为 4 个模块, 主要组成为: 卷积层 (3×3 卷积块+批量归一

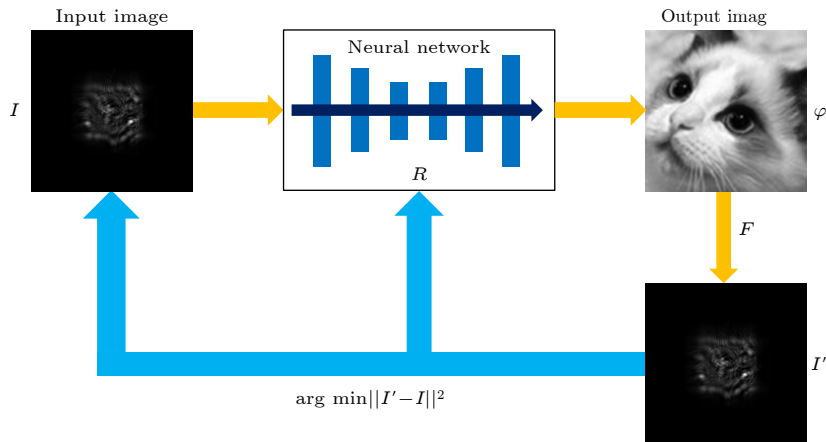


图 2 网络框架示意图

Fig. 2. Schematic diagram of network framework.

化+leakyReLU 激活函数), 下采样层 (2×2 最大池化层), 上采样层 (反卷积块), 跳跃连接层. 神经网络示意图如图 3 所示.

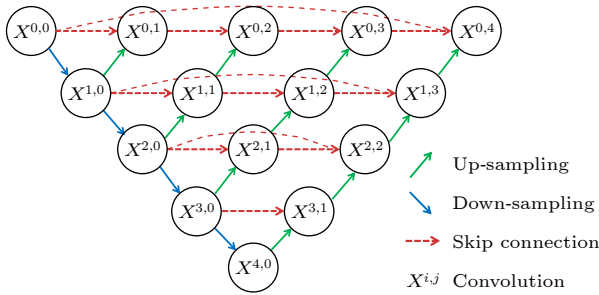


图 3 神经网络原理图

Fig. 3. Principle diagram of neural network.

在学习的过程中, 损失函数定义为经过物理模型后输出的图样和输入神经网络的图样的均方差 (MSE):

$$L = \frac{1}{MN} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [F(R(I_{m,n})) - I_{m,n}]^2, \quad (11)$$

其中 M 和 N 分别为输入图样的宽度和高度. 使用 Adam 优化器对网络的网络权重和偏置因子进行优化, 学习率 η 设为 0.005.

3.2 仿 真

对相位物体的光学分数傅里叶变换图像进行还原, 加载在相位上的图像如图 4 所示. 然后对复振幅光场进行不同阶数的分数傅里叶变换, 得到输出光强. 使用图像传感器记录光强, 并尝试使用神

经网络对其进行相位恢复. 先讨论分数傅里叶变换阶数小于 1 时候的情况, 分数阶分别为 0.50, 0.55, 0.60, 0.65, 0.70, 将变换后的光强图输入到本文神经网络进行相位重建. 光强图像和相应相位重建的结果如图 5 所示. 图 5 中第 1 行是纯相位物体经过分数傅里叶变换的强度图像, 第 2 行是与强度图像相对应的相位恢复的图像.



图 4 加载在相位的测试图像 (a) Lenna; (b) 猫

Fig. 4. Test image loaded in phase: (a) Lenna; (b) cat.

接下来, 研究分数傅里叶变换阶数大于 1 的情况, 分数阶分别为 1.30, 1.35, 1.40, 1.45 和 1.50. 将变换后的图输入到本文神经网络中进行重建. 光强图像和相应相位重建的结果如图 6 所示. 图 6 中第 1 行是纯相位物体经过分数傅里叶变换的强度图像, 第 2 行是与强度图像相对应的相位恢复的图像.

4 实验结果与讨论

4.1 实验光路

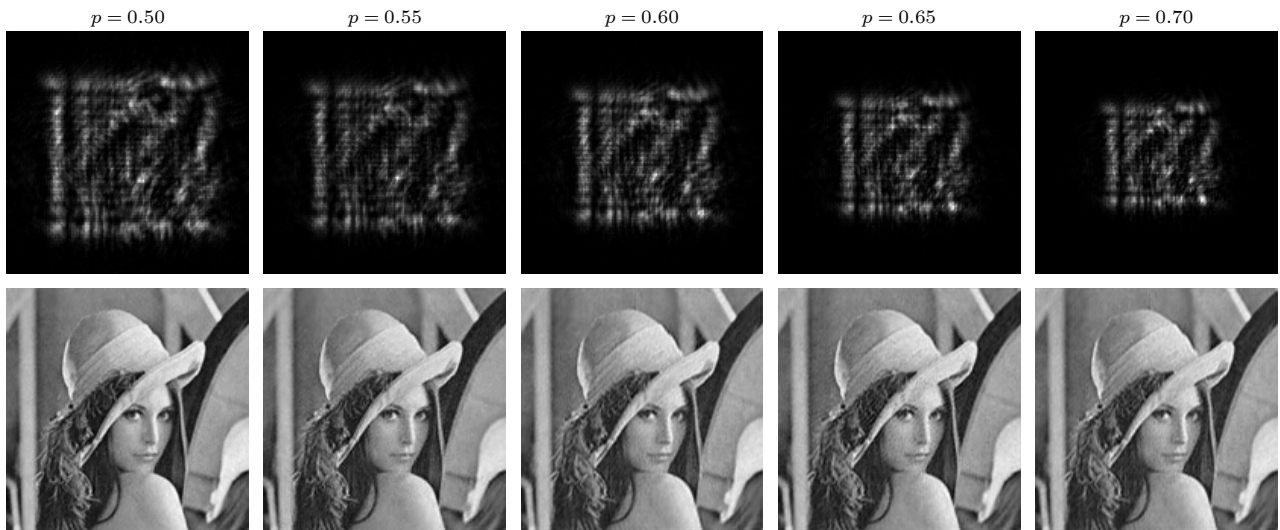
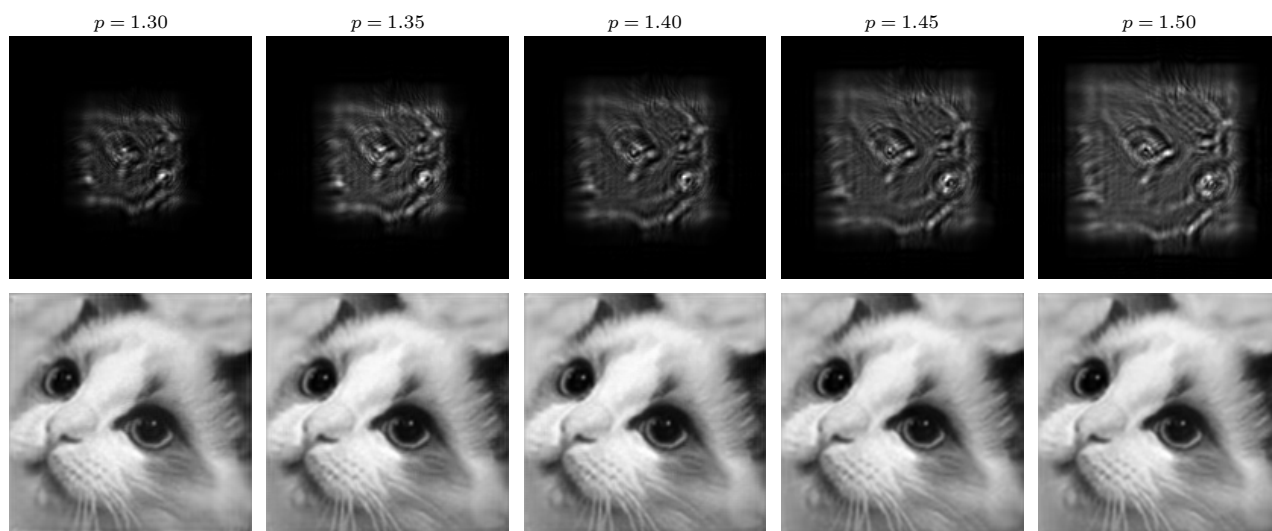


图 5 不同阶数 p 的光强图像及其相位重建 ($p < 1$)

Fig. 5. Light intensity images of different orders p and their phase reconstruction ($p < 1$).

图 6 不同阶数 p 的光强图像及其相位重建 ($p > 1$)Fig. 6. Light intensity images of different orders p and their phase reconstruction ($p > 1$).

对于实验光路, 选用的激光器的波长为 632.8 nm, 将进行了光阑滤波的光扩束后打在空间光调制器上, 将图像加载到相位上, 然后接 $4f$ 系统滤波, 最后进行分数傅里叶变换, 用光学相机进行拍照得到光学强度图像. 实验光路如图 7 所示.

在搭建光路时, 要注意对于斜射式光路, 为了保证空间光调制器上的相位变化足够小, 要尽可能的缩小其入射角, 本文光路也充分考虑了这一点, 将入射光的角度控制在 4° 左右.

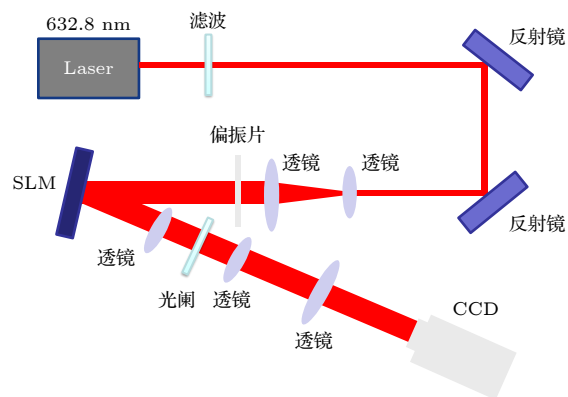


图 7 分数傅里叶变换实验光路图

Fig. 7. Fractional Fourier transform experimental optical path diagram.

4.2 实验结果

使用焦距为 50 mm 的透镜, 并将透镜与输入表面的输出表面之间的距离设置为 70 mm. 用光学相机拍照以获得光强图, 该光强图被输入到本文神经网络框架中.

首先是进行强度重建, 此时, 加载在空间光调制器上的图像为强度图像, 然后将其按上述参数进行分数傅里叶变换, CCD 所得图像输入到神经网络中做强度重建. 经过 2000 次迭代, 神经网络的输出图像与原始图像的对比如图 8 所示.

然后是相位重建, 此时, 加载在空间光调制器上的图像为相位图像, 将其按上述参数进行分数傅里叶变换, CCD 所得图像输入到神经网络中作相位重建. 经过 2000 次迭代, 神经网络的输出图像

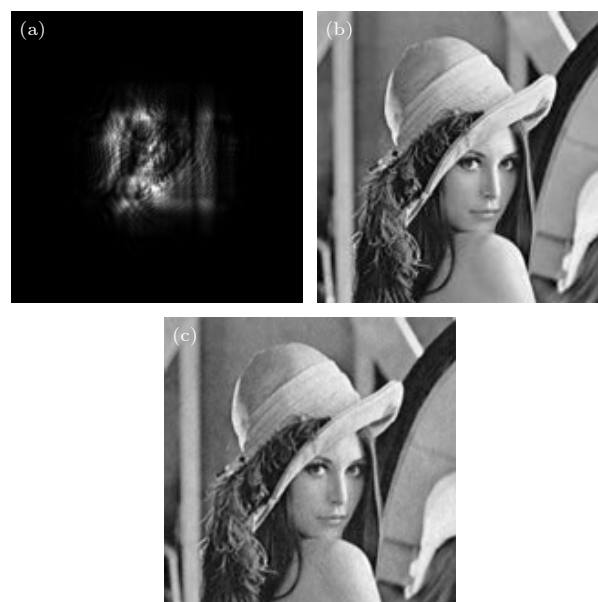


图 8 (a) 光路输出的强度图; (b) 原始的强度图像; (c) 重建的强度图像

Fig. 8. (a) Intensity map of the optical path output; (b) the original intensity image; (c) reconstructed intensity image.

与原始图像的对比如图 9 所示.

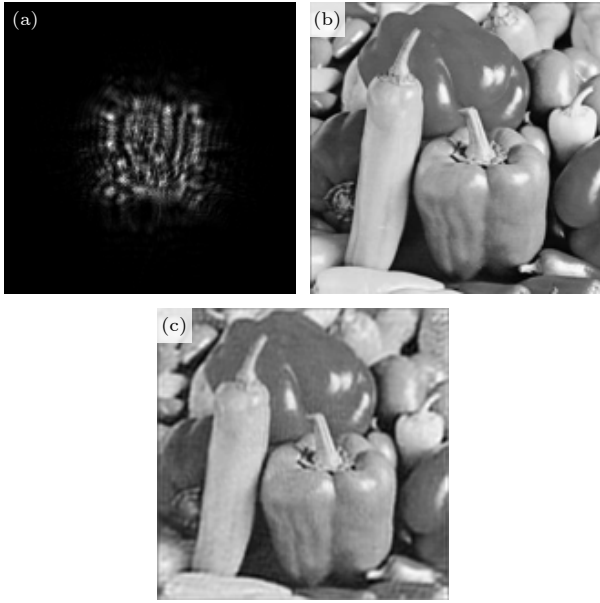


图 9 (a) 光路输出的强度图; (b) 加载在相位的原始图像; (c) 重建的相位图像

Fig. 9. (a) Intensity map of the optical path output; (b) load the original image in phase; (c) reconstructed phase image.

强度重建和相位重建的损失函数如图 10 和图 11 所示, 将迭代次数设置为 2000 次, 可以看出, 随着迭代次数的增加, 损失函数极速下降, 算法的收敛性良好.

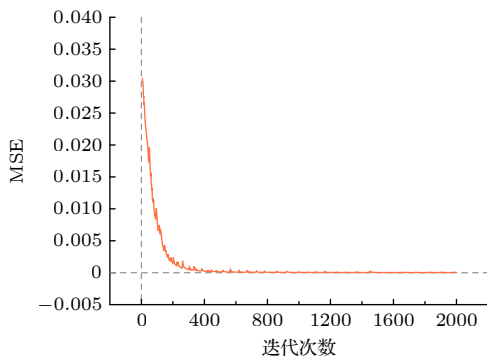


图 10 重建强度和原始强度间的 MSE 随迭代次数的变化
Fig. 10. Variation of MSE between reconstructed intensity and original intensity with the number of iterations.

计算两个图像的归一化互相关系数 (NCC) $\rho(x, y)$, 可以评价原始图像 $f(x, y)$ 和重建图像 $g(x, y)$ 之间的相似性, 范围为 0—1. 当 $\rho(x, y) = 1$ 时, 两个图像完全一致. 可以通过计算重建图像和原始图像之间的归一化互相关系数来评估神经网络的重建质量. NCC 的公式为^[23]

$$\rho(x, y) = \frac{C_{f,g}}{\sqrt{C_{f,f}}\sqrt{C_{g,g}}}, \quad (12)$$

其中, 协方差的定义为

$$C_{f,g} = \frac{1}{MN} \sum_{x=1}^M \sum_{y=1}^N [f(x, y) - \bar{f}(x, y)] \times [g(x, y) - \bar{g}(x, y)], \quad (13)$$

式中 $\bar{f}(x, y)$ 和 $\bar{g}(x, y)$ 分别为 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 的均值.

经过分数傅里叶变换后重建的强度图像和原始强度图像的归一化互相关系数 $\rho(x, y) = 0.9977$; 重建的相位图像和原始相位图像的归一化互相关

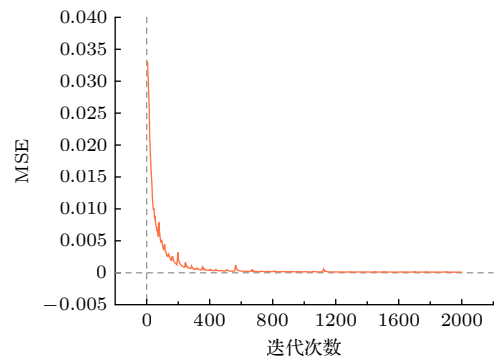


图 11 重建相位和原始相位间的 MSE 随迭代次数的变化
Fig. 11. Variation of MSE between reconstructed phase and original phase with the number of iterations.

系数 $\rho(x, y) = 0.9971$.

5 结 论

本文提出了一种基于未训练的深度学习的分数傅里叶变换相位恢复方法. 通过仿真和实验的结果可以看出, 该框架可以实现二维平面图像在分数傅里叶变换域的相位恢复, 重建效果非常好. 本实验将深度学习引入到了分数傅里叶域的相位恢复中, 与传统的深度学习相比, 本文方案使用嵌套物理模型的神经来完成强度图像的相位恢复. 相比于传统的神经网络, 该方案的优点在于, 其省去了收集大量标记数据训练的过程, 并使用单个强度图直接完成分数傅里叶变换图像的相位重建, 为分数傅里叶变换的相位恢复提供了一个新的方法.

黄宇航: huangyuhang@stu.xmu.edu.cn.

参考文献

- [1] Wu H, Wang R Z, Zhao G P, Xiao H P, Liang J, Wang D D, Tian X B, Cheng L L, Zhang X M 2020 *Opt. Lasers Eng.* **134** 106183
- [2] Ren Z, Xu Z, Lam E Y 2019 *Adv. Photonics* **1** 016004
- [3] Xiao W, Wang Q X, Pan F, Cao R Y, Wu X T, Sun L W 2019 *Biomed Opt. Express* **10** 1613
- [4] Li S, Deng M, Lee J, Sinha A, Barbastathis G 2018 *Optica* **5** 803
- [5] Sun Y W, Shi J H, Sun L, Fan J P, Zeng G H 2019 *Opt. Express* **27** 16032
- [6] Nguyen T, Xue Y J, Li Y Z, Tian L, Nehmetallah G 2018 *Opt. Express* **26** 26470
- [7] Cheng Y F, Strachan M, Weiss Z, Deb M, Carone D, Ganapati V 2019 *Opt. Express* **27** 644
- [8] Gerchberg R W, O. A S W 1972 *Optik* **35** 237
- [9] Gureyev T E, Roberts A, Nugent K A 1995 *J. Opt. Soc. Am. A* **12** 1932
- [10] Sinha A, Lee J, Li S, Barbastathis G 2017 *Optica* **4** 1117
- [11] Ulyanov D, Vedaldi A, Lempitsky V 2020 *Int. J. Comput. Vision* **128** 1867
- [12] Wang F, Bian Y, Wang H, Lyu M, Pedrini G, Osten W, Barbastathis G, Situ G H 2020 *Light Sci. Appl.* **9** 77
- [13] Mendlovic D, Ozaktas H M 1993 *J. Opt. Soc. Am. A* **10** 1875
- [14] Lohmann A W 1993 *J. Opt. Soc. Am. A* **10** 2181
- [15] Zalevsky Z, Mendlovic D, Dorsch R G 1996 *Opt. Lett.* **21** 842
- [16] Chang C L, Xia J, Lei W 2012 *Opt. Commun.* **285** 24
- [17] Zhao S M, Yu X D, Wang L, Li W, Zheng B Y 2020 *Opt. Commun.* **474** 126086
- [18] Abuturab M R, Alfalou A 2022 *Opt. Laser Technol.* **151** 108071
- [19] Chang C L, Xia J, Jiang Y Q 2014 *J. Display Technol.* **10** 107
- [20] Bitran Y, Mendlovic D, Dorsch R G, Lohmann A W, Ozaktas H M 1995 *Appl. Opt.* **34** 1329
- [21] Liu S P, Meng X F, Yin Y K, Wu H Z, Jiang W J 2021 *Opt. Lasers Eng.* **147** 106744
- [22] Ronneberger O, Fischer P, Brox T 2015 *U-Net: Convolutional Networks for Biomedical Image Segmentation* (Cham: Springer International Publishing) pp234-241
- [23] Shen C, Tan J B, Wei C, Liu Z J 2016 *Opt. Express* **24** 16520

INVITED REVIEW

Fractional Fourier transform imaging based on untrained neural networks*

Huang Yu-Hang¹⁾²⁾ Chen Li-Xiang^{1)†}

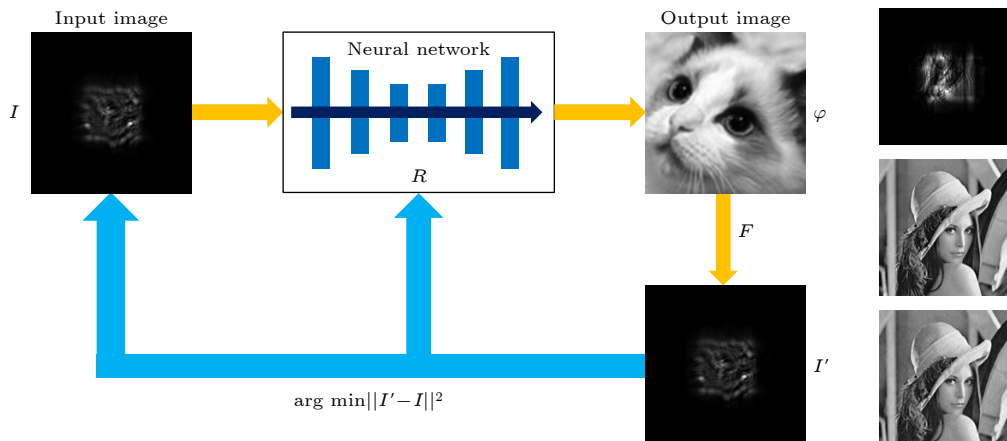
1) (Department of Physics, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

2) (Institute of Artificial Intelligence, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

(Received 8 January 2024; revised manuscript received 25 January 2024)

Abstract

Fractional Fourier transform is an important branch of optical research, and it is widely used in optical encryption, optical filtering, image watermarking and other fields. The phase retrieval in the case of fractional



Fourier transform is widely studied. Also, deep learning has been an intriguing method for optical computational imaging. However, in optical computational imaging, traditional deep learning methods possess some intrinsic disadvantages. In optical imaging experiments, it is often difficult to obtain sufficient quality and quantity of labeled data for training, thus leading to poor robustness of the trained neural network. Even with sufficient datasets, the training time can be particularly long. In recent years, there has been an increase in interest in physic-driven untrained neural networks for computational imaging. Herein we use such a method to study the fractional Fourier transform imaging, which combines neural networks with optical models to achieve phase retrieval of fractional Fourier transform. Unlike the traditional neural network training with the original image as the target, our network framework is used only a single intensity image for the phase retrieval of fractional Fourier transform images. The output image of the neural network will serve as an optical model through fractional Fourier transform, and then the output image of the optical model will be used as a loss function to drive the neural network training with the output image of the neural network. We study the fractional Fourier transform reconstruction for the cases where the fractional order is less than 1 and greater than 1. The simulations and experiments show that the network framework can implement the fractional Fourier transform reconstructions of the intensity objects and phase objects for different fraction orders, in which only 2000 iterations are needed. The experimental results show that the similarity between the reconstructed image and the original image, i.e. the number of normalized correlation coefficient, can reach 99.7%. Therefore, our work offers an efficient scheme for functional Fourier transform reconstruction with physics-enhanced deep neural network.

Keywords: fractional Fourier transform, deep learning, neural network, phase retrieval

PACS: 42.30.Rx, 07.05.Mh, 42.30.Kq

DOI: [10.7498/aps.73.20240050](https://doi.org/10.7498/aps.73.20240050)

CSTR:

* Project supported by the State Key Program of National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12034016) and the Natural Science Foundation of Fujian Province, China (Grant No. 2021J02002).

† Corresponding author. E-mail: chenlx@xmu.edu.cn



基于未训练神经网络的分数傅里叶变换成像

黄宇航 陈理想

Fractional Fourier transform imaging based on untrained neural networks

Huang Yu-Hang Chen Li-Xiang

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 1, 094201 (2017) DOI: 10.7498/aps.73.20240050

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.73.20240050>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in