基于不同变系数和势场的分数系统中二次相位调控厄米-高斯光束动力学*

谭超[1)] 梁勇[1)] 邹敏[2)†] 雷同[1)] 陈龙[1)] 唐平华[3)] 刘明伟[1)‡]

1) (湖南科技大学信息与电气工程学院, 湘潭 411201)

2) (湖南科技大学化学化工学院, 湘潭 411201)

3) (湘潭大学物理与光电工程学院, 湘潭 411105)

(2024 年 3 月 24 日收到; 2024 年 5 月 11 日收到修改稿)

本文基于带有不同变系数和势的分数薛定谔方程, 研究了二次相位调制 (QPM) 下厄米-高斯光束的演化特性. 在自由空间中, 光束聚焦位置随着正 QPM 系数的增加或莱维指数的减小而变大. QPM 为负时, 光束聚焦消失. 在余弦调制和 QPM 共同作用下, 光束的传输不再遵循余弦规律振荡, 而是表现出一大一小的呼吸结构, 其演化周期会随调制频率的增加而降低. 引入线性调制时, 分裂光束的运动轨迹呈现抛物线状. 在线性调制和 QPM 共同影响下, 光束呈现出聚焦或聚焦消失的特性. 当考虑幂函数调制和正 QPM 共同影响时, 在莱维指数较小时, 光束在一定传输距离内保持不失真的直线传输. 当线性势作用时, 光束的分裂随着线性系数的增加而逐渐消失, 最终呈现周期性演化. 在加入 QPM 后, 光束会得到明显放大. 另外, 光束演化周期与线性系数成反比, 横向振幅随着莱维指数的增加而变大. 当抛物势和 QPM 共同作用时, 光束会呈现出自动聚焦, 散焦效应, 聚焦频率会随着莱维指数和抛物系数的增加而变大. 这些特性在光学操纵, 光学聚焦等领域具有潜在的应用价值.

关键词: 分数薛定谔方程, 厄米-高斯光束, 二次相位调制, 变系数和势

PACS: 42.65.–k, 42.81.Dp **DOI:** 10.7498/aps.73.20240427

1 引 言

在过去的十几年里, 研究者对具备特殊功能的新型激光束展开了广泛的探讨. 如完美涡旋光束[1], 球形高斯拉盖尔光束[2], 特里科米高斯光束[3], 椭圆[4] 和复变[5] 正弦高斯交叉相位光束. 由于厄米-高斯 (HG) 光束具有特殊的波前相位和光强分布, 也引起了广泛的关注, 其在诸多领域都有较好应用前景, 如超材料[6]、粒子操纵[7]、高功率定标放大[8] 以及光学涡旋结[9] 等. 近几年, 研究者们着重探讨了在不同介质中 HG 光束的传输特性. 例如, 研究者分析了强非局部平面波导中 HG 光束的传输特性[10], 该研究结果为光调制器的制造提供了重要参考价值. 在此基础上, Song 等[11] 发现厄米-高斯和拉盖尔-高斯叠加光束在强非局部非线性介质作用下, 其特征参数决定了哪种孤子在传输过程中占主导地位. 之后, 相继报道了 HG 光束在非均匀大气中的自聚焦效应[12] 和等离子体中产生的二次谐波现象[13]. 2023 年, Ebel 与 Talebi[14] 探讨了电子在 HG 光束下的非弹性散射, 其结果表明可以通过使用结构光波来实现电子波包的能量调制, 从而产

* 湖南省自然科学基金 (批准号: 2022JJ30264) 和湖南省教育厅科学研究项目 (批准号: 21B0476, 21B0136, 22B0479) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: minzou@hnust.edu.cn

‡ 通信作者. E-mail: phymwliu@foxmail.com

生类似光子诱导近场电子显微镜的电子光谱. 同年, Che 等[15] 发现不同阶数的 HG 光束在特征长度渐长的非局部非线性介质中可以绝热传播. 另外, Saad 等[16] 分析了广义厄米余弦高斯光束在海上湍流中的传播, 研究成果对光通信和遥感等应用有重要意义.

作为非线性薛定谔方程的扩展, 分数薛定谔方程 (FSE) 自 Laskin[17] 提出后, 众多研究者开始对 FSE 进行深入探讨. 在过去的几十年里, 对该方程的研究侧重于数学领域. 直到 2015 年, Longhi[18] 提出了一种光学实验方案, 将 FSE 引入到光学领域中, 激起了研究 FSE 光学系统中光束传输特性的兴趣. 例如, 研究者发现在 FSE 中超高斯光束最终演化成孤子[19]; 圆艾里光束在 FSE 中的自聚焦现象[20]; FSE 中两个艾里光束之间的反常相互作用[21]等. 通过引入不同调制, 进一步加深了对光束操控的研究. 在带有余弦调制的 FSE 中, Zang 等[22] 研究表明高斯光束呈现周期性振荡, 可以通过调整系统参数和啁啾参数有效的控制高斯光束的演化. 基于此结果, Xin 等[23] 对高斯光束在不同纵向调制下的传输特性进行了理论分析和数值模拟. 另外, 在具有不同外部势的 FSE 中光束演化表现出独特的性质. Huang 等[24] 发现艾里光束在线性势作用下分裂现象消失, 呈现出周期性演化, 光束演化周期随线性系数的增大而降低. 受此启发, 学者们探讨了线性势作用下双艾里光束[25] 和圆艾里光束的演化特性[26]. 此外, 在抛物势作用下光束传输也有不同的表现. 皮尔斯-高斯光束在抛物势作用下表现为周期束缚态[27]. FSE 中 HG 光束在抛物势作用下呈现出自聚焦, 离焦变化[28], 可以通过调整抛物系数和莱维指数来控制光束演化. 这些研究结果表明, 基于 FSE 的光学系统在光学操纵领域有着广泛的应用前景, 并且能够有效地控制光束的传输特性.

近年来, 研究人员发现施加 QPM 的光束在传输过程中表现出有趣的行为. Zhang 等[29] 基于非线性薛定谔方程, 对艾里光束施加 QPM 后使之发生畸变, 通过调整 QPM 系数实现了对艾里光束的操纵. 有人根据此研究结果, 通过改变 QPM 系数使圆艾里光束演变为艾里或贝塞尔模式, 发现光束在传输过程中表现出双聚焦行为[30]. 之后, 研究者们相继分析了 QPM 下一维和圆艾里光束的自成像效应[31], 以及不同势和 QPM 共同作用下艾里光束的演化特性[32], 其结果在光捕获和粒子加速领域有潜在应用价值. 最近, 有学者讨论了 FSE 中用 QPM 控制光束的传输动力学[33], 结果表明 FSE 下光束的聚焦受 QPM 系数和莱维指数的影响. 然而, 目前对带有不同变系数和势的 FSE 中用 QPM 控制 HG 光束演化的研究鲜有报道.

本文以带有变系数和外部势的 FSE 为基本框架, 研究了 QPM 下 HG 光束的传输性质. 首先分析了自由空间中 QPM 系数和莱维指数对 HG 光束演化的影响. 其次探讨了余弦调制和 QPM 共同作用下 HG 光束的演化特性. 通过调整 QPM 系数, 莱维指数和调制频率可以改变光束的呼吸行为. 同时, 相继分析了在线性调制、幂函数调制作用下, 施加 QPM 后, 光束传输特性的变化. 最后通过调整线性系数、抛物系数和 QPM 系数等参数, 依次研究了施加 QPM 后, 线性势、抛物势作用下, HG 光束的演化特性. 这些特性使之在光学操纵, 光学聚焦等领域展现了重要的应用前景.

2 理论模型

光束在带有势的变系数分数系统传输时, 其演化过程可以用变系数分数薛定谔方程描述:

$$\mathrm{i}\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{1}{2}D\left(z\right)\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{\alpha/2}U(x,y,z)$$
$$-V\left(x\right)U\left(x,y,z\right)=0, \tag{1}$$

其中 U 代表光束的包络; x, y 为归一化横向坐标, z 为归一化传输距离; $\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{\alpha/2}$ 是具有莱维指数 $\alpha\ (1<\alpha\leqslant 2)$ 分数阶拉普拉斯式. $D\left(z\right)$ 为变系数, 表示距离 z 的函数, $V(x)$ 为势函数. 当 $\alpha=2$, $D\left(z\right)=1$ 时, 方程 (1) 为标准薛定谔方程.

无势作用下, 方程 (1) 经过傅里叶变换可以写为

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial z}U\left(k_x,k_y,z\right)$$
$$-\frac{1}{2}D\left(z\right)\left(k_x^2+k_y^2\right)^{\alpha/2}U\left(k_x,k_y,z\right)=0, \tag{2}$$

其中 $\widehat{U}\left(k_x,k_y,z\right)$ 是 $U\left(x,y,z\right)$ 的傅里叶变换, k_x 和 k_y 代表空间频率, 方程 (2) 的通解可写为

$$U\left(k_x,k_y,z\right)=U\left(k_x,k_y,0\right)$$
$$\times\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}\left(k_x^2+k_y^2\right)^{\alpha/2}\int_0^z D\left(\zeta\right)\mathrm{d}\zeta\right]. \tag{3}$$

$\widehat{U}(k_x,k_y,0)$ 为 $U(x,y,0)$ 的傅里叶变换, 因此可以得到方程 (1) 的通解为

$$U(x,y,z)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}U(k_x,k_y,z)\times\exp(\mathrm{i}k_x x+\mathrm{i}k_y y)\,\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y. \tag{4}$$

本文采用带有 QPM 的 HG 光束作为初始输入光谱:

$$U(k_x,k_y,0)=\frac{(-\mathrm{i})^n}{a^2}H_n\left(\frac{k_x}{a}\right)H_m\left(\frac{k_y}{a}\right)\times\exp\left[-\frac{(k_x^2+k_y^2)}{2a^2}\right]\exp\left[\mathrm{i}p\left(k_x^2+k_y^2\right)\right], \tag{5}$$

其中 n, m 为 x 方向和 y 方向上的横向模数; $H_n(t)=(-1)^n\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}^n\mathrm{e}^{-t^2}/\mathrm{d}t^n$ 为厄米多项式, a 为任意伸缩系数, p 为二次相位调制系数, 本文中采用 $n=m=2$, $a=2$.

将 (5) 式作傅里叶逆变换, 得到初始输入光场为

$$U(x,y,0)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}U(k_x,k_y,0)\times\exp(\mathrm{i}k_x x+\mathrm{i}k_y y)\,\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y. \tag{6}$$

在传播过程中, 光束宽度 w 可以表示为

$$w=\sqrt{\frac{2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-x_\mathrm{c})^2|U|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|U|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}}. \tag{7}$$

其中 x_c 为光束的重心,

$$x_\mathrm{c}=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x|U|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|U|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}.$$

由于在光学系统的研究中难以得到初始光场 $U(x,y,0)$ 在空间传播后的 $U(x,y,z)$ 的通解, 对此采用 (5) 式定义的初始输入光谱, 运用数值计算工具先对 (5) 式作傅里叶逆变换得到 $U(x,y,0)$, 然后通过分步傅里叶法来数值求解 (1) 式用以模拟 $U(x,y,z)$ 在传播过程中的演变特性.

3 数值模拟结果与分析

3.1 带有 QPM 的 HG 光束演化

为了更加详细地观察光束在传播过程中的变化, 在本文研究中, 所有的演化图均采用 $|U|$ 而不是 $|U|^2$. 图 1 展示了不同莱维指数 α 和 QPM 系数 p 下 HG 光束的演化. 由图 1(a0)—(a2) 可以看出, 没有 QPM 的 HG 光束的焦点位于初始输入平面. 在 $\alpha=1$ 时, 光束经过短距离传播后, 分裂成两个子光束, 子光束呈轴中心对称分布, 子光束之间的距离随着传输距离的增加而增大. 这种分裂现象的原因是: 其中一个光波与正频域相关, 在传输过程中表现出加速的特性; 另一个光波与负频域对应, 表现出减速的特性. 两波之间的相互作用导致在 HG 光束的传输中观察到了分裂现象. 随着 α 的增大, 光束衍射变得更强, 光束出现衍射的时间更早, 各光束之间的距离变得更大. 当考虑正 QPM 时, 如图 1(b0)—(b2) 所示, 光束的焦点并未在初始位置, 而是经过一段距离传播后发生聚焦, 然后再分裂. 此外, α 越大, 光束的聚焦位置向更短的传播距离移动. 当施加负的 QPM 时, 从图 1(c0)—(c2) 可以看出, 光束聚焦现象消失, 但是随着传输距离的增加, 光束仍然会发生分裂. 当 $\alpha=2$ 时, 可以用聚焦位置公式 $z_\mathrm{f}=2p$ 来解释光束聚焦出现和消失的原因. z_f 为焦点位置, 当 p 为正时, 焦点位置随着 p 的增加而线性增加. 当 p 为负时, 这时焦点位置为负, 所以光束聚焦特性消失. QPM 的作用类似于光学透镜, 可以通过调整 QPM 系数 p 来改变光学系统的焦距. 当增大 p 时, 焦点会沿着中心轴移动. 另外, α 的变化会改变光束在传播过程中的相位, 进而影响光学系统.

为了更加清晰地了解 HG 光束的聚焦特性, 图 2(a0)—(c1) 展示了不同莱维指数 α 和 QPM 系数 p 对光束在传播过程中的影响. 从图 2(a0)—(b0) 可以看出, HG 光束的峰值振幅会随着正 QPM 系数 p 的增大而降低, 而聚焦位置则会随着 p 的增大而增大. 当 p 为负值时, 光束振幅会随着 p 的减小而减弱, 并且不会发生聚焦. 然而在图 2(c0) 中, 观察到当 $\alpha=2$ 时, 光束峰值振幅受正 QPM 系数 p 的影响很小, 随着 p 的增大, 峰值振幅几乎保持不变. 在图 2(a1) 中, 随着 α 的增大, 衍射效应越强, 光束在传输过程中能量损耗的越多. 在图 2(b1) 中, 光束的峰值振幅随着 α 的增加先增大后减小, 聚焦位置随着 α 的增大而降低. 而对于图 2(c1) 中的负 QPM 系数 p, 光束的聚焦现象消失, 光束能量随着 α 的增大而衰减的更快. 此外当 α 较大时, 光束在经过一段距离传输后, 由于衍射效应的增强, 光束会出现紊乱. 图 2(d) 表明, 当 α 较小时, HG

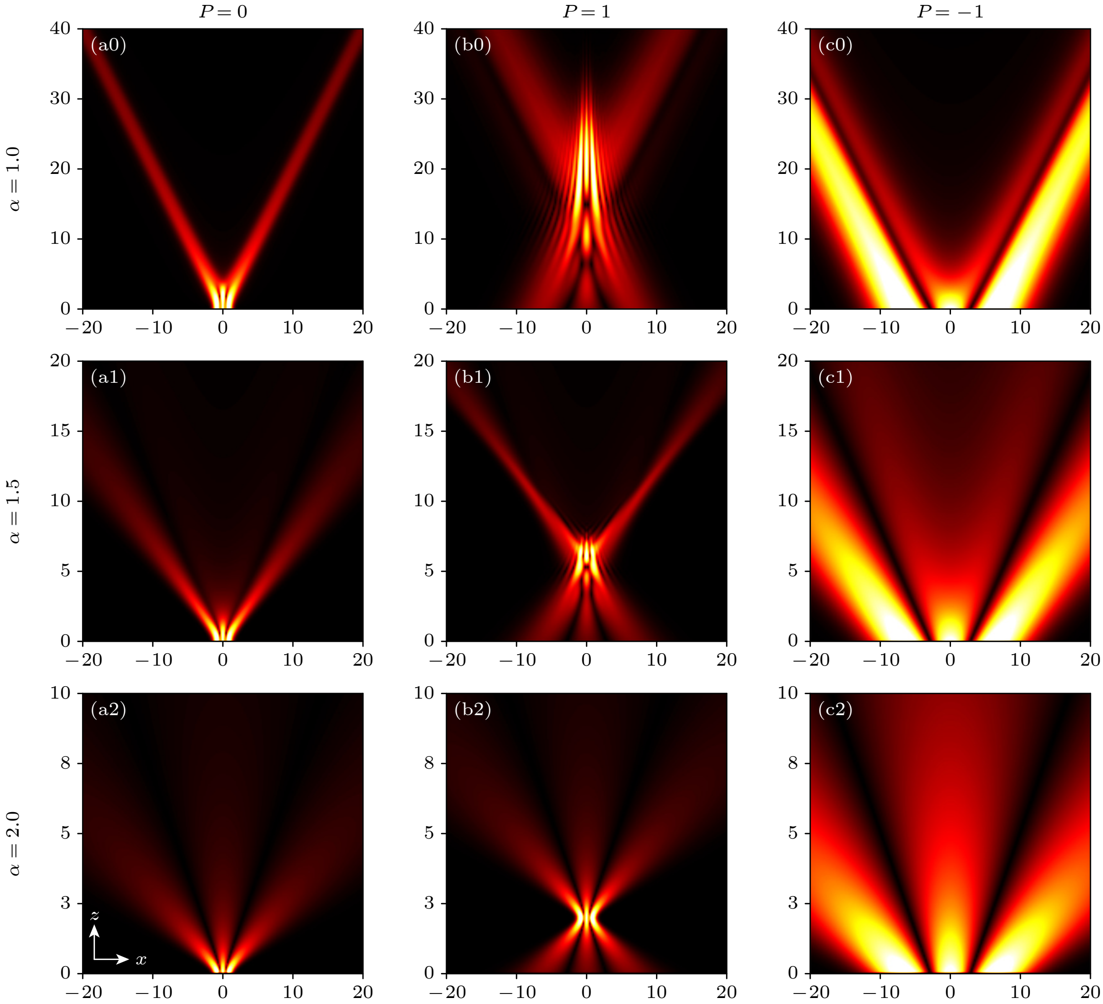


图 1 不同莱维指数 α 和 QPM 系数 p 下 HG 光束演化图, 其中 $D(z)=1$, $V(x)=0$

Fig. 1. Evolution of HG beams for different Lévy index α and QPM coefficient p, here $D(z)=1$, $V(x)=0$.

光束的峰值振幅会随着 p 的增加而降低; 而当 α 较大时, 峰值振幅随着 p 的增加先增大然后降低. 从图 2(e) 发现聚焦位置会随着 α 的降低或 p 的增加而减小. 另外当 $\alpha=2$ 时, 聚焦位置与 p 呈线性相关. 基于本节讨论可知 HG 光束的分裂受莱维指数 α 的影响. 光束的聚焦位置和峰值振幅会随莱维指数 α 和正 QPM 系数 p 的变化而改变, 当 QPM 系数 p 为负时, 光束聚焦特性消失.

3.2 不同变系数下带有 QPM 的 HG 光束演化

本节讨论不同变系数下带有 QPM 的 HG 光束传输特性 ($V(x)=0$). 图 3(a0)—(c2) 展示了余弦调制 $D(z)=\cos(\Omega z)$ 下不同莱维指数 α 和 QPM 系数 p 的 HG 光束演化, Ω 为调制频率. 图 3(a0)—(a2) 中, HG 光束先分裂成两个子光束, 由于余弦调制的作用, 光束形成了周期性振荡. 随着 α 的增大, 由于衍射效应的增强, 横向振荡幅度增大. 图 3(b0)—(b2) 展示了 p 为正时 HG 光束的演化. 当 $\alpha=1$ 时, 光束先聚焦后发散, 然后再次聚焦, 形成周期性的呼吸振荡. 随着 α 的增大, 光束经过短距离传输后先完成第一次聚焦, 然后再分裂, 再聚焦, 此时完成了一次振荡幅度较小的呼吸行为. 随后两子光束又相互排斥, 再吸引, 完成了一次振荡幅度较大的呼吸行为, 光束在这一小一大振荡幅度的交替下呈现周期性呼吸态. 当施加负 QPM 时, 光束表现出一大一小的周期性呼吸行为. 通过对比正负 QPM 下光束行为的变化, 发现两者除了在一个周期内的呼吸结构顺序发生了调换, 其他的特性并无差异. 从图 3(a3)—(c3) 束宽对比图可以明显地看出 HG 光束的演化规律, 束宽会随着 α 的增大而变大, 只有余弦调制作用时, HG 光束呈现出余弦轨迹振荡规律. 对光束施加 QPM 后, 光束的余

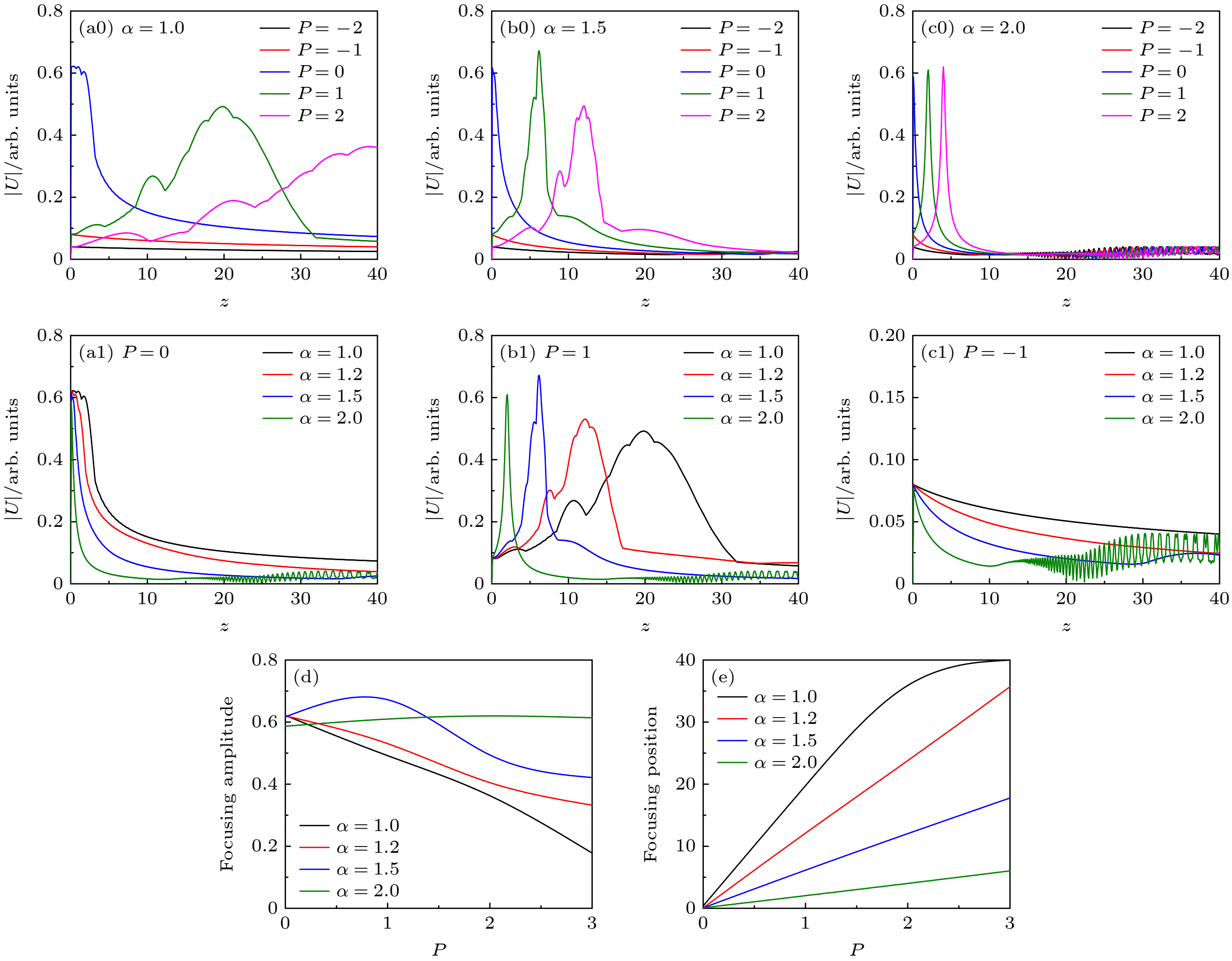


图 2 (a0)—(c1) 不同莱维指数 α 和 QPM 系数 p 下 HG 光束的包络图; 不同莱维指数 α 下 (d) 聚焦振幅和 (e) 聚焦位置与 QPM 系数 p 的关系

Fig. 2. (a0)–(c1) Envelopes of HG beams for different Lévy index α and QPM coefficient p; (d) focusing amplitude and (e) focusing position versus QPM coefficient p under different Lévy index α, respectively.

弦轨迹振荡发生破坏, 呈现出一大一小或一小一大的呼吸演化.

图 4 给出了余弦调制 $D(z) = \cos(0.1z)$ 下不同莱维指数 α 和 QPM 系数 p 对 HG 光束演化的影响. 从图 4(a0)—(b0) 看出, HG 光束的峰值振幅随着 $|p|$ 的增大而降低, 并且当 $|p|$ 较大时, 峰值振幅周期性地呈现多个峰. 另外 p 的正负并不会改变光束的峰值振幅, 但会影响光束的呼吸行为. 当 $\alpha = 2$ 时, 如图 4(c0) 所示, 光束的峰值振幅受 QPM 调制的影响很小, 并且始终保持周期性的单峰. 此外从图 4(a1) 可以看出, 当没有 QPM 时, α 的变化并不会改变光束的演化周期和峰值振幅. 加入 QPM 后, 如图 4(b1)—(c1) 所示, 当 p 为正时, HG 光束总是先聚焦再离焦, 峰值振幅随着 α 的增大先增加后又降低. 当 p 为负时, 除了呼吸次序发生替换外, 其他现象与 p 为正时一样.

图 5 给出不同调制频率 Ω 和 QPM 系数 p 下 HG 光束的演化. 从图 5(a0)—(c2) 可以看出, 随着 Ω 的增大, 使得光束相位变化速度增加, 导致光束的横向振荡幅度变得越来越小, 光束的演化周期明显降低. 此外, 当 $p = 0$ 时, 光束的焦点明显多于 $p \neq 0$ 的情况. 从图 5(a3)—(c3) 束宽变化图可以明显看出束宽会随着 Ω 的增大而降低. 当 $p = 0$ 时, 随着传输距离的增加, 束宽先变大, 后减小, 然后再变大, 形成周期性变化. 当加入 QPM 时, 束宽整体会变大, 但是 p 的正负并不会改变束宽大小, 只会影响光束呼吸行为.

图 6 展示了线性调制 $D(z) = z$ 下不同莱维指数 α 和 QPM 系数 p 的 HG 光束演化. 从图 6(a0)—(a2) 可以看出, 当 $p = 0$ 时, HG 光束的演化类似于

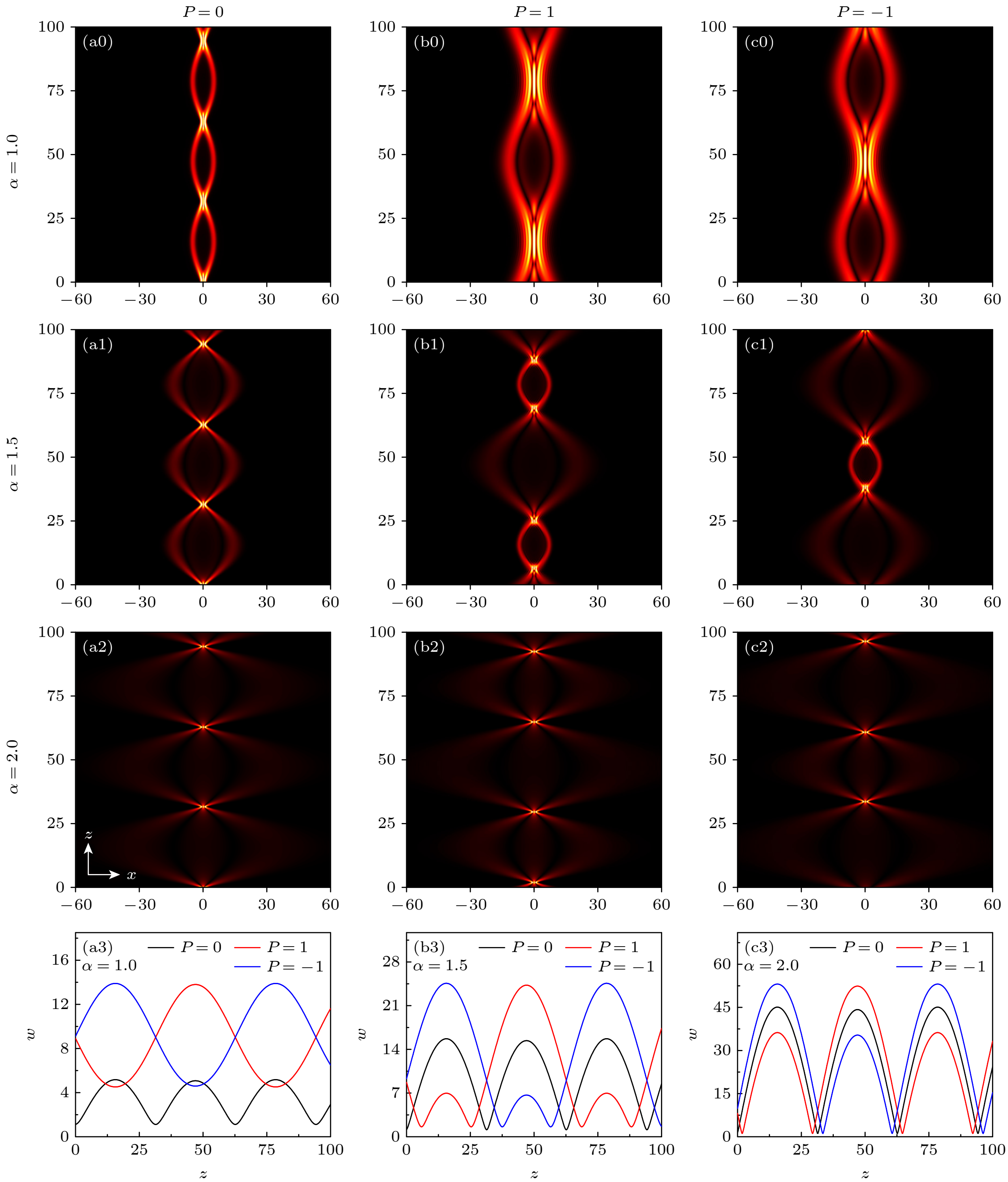


图 3 (a0)—(c2) 余弦调制 $D(z)=\cos(\varOmega z)$ 下不同莱维指数 α 和 QPM 系数 p 的 HG 光束演化图, $\varOmega=0.1$; (a3)—(c3) 束宽随传输距离 z 变化图

Fig. 3. (a0)–(c2) Evolution of HG beams with different Lévy index α and QPM coefficient p under cosine modulation $D(z)=\cos(\varOmega z)$, here $\varOmega=0.1$; (a3)–(c3) beam width varies with transmission distance z.

抛物线状. 这是由于在线性调制下, 分裂光束之间的排斥力随着传输距离的增加而变大. 此外, 随着 α 的增加, 光束的衍射效应增强, 由于莱维分布的长尾性, 子光束之间的距离随着传输距离的增加变得更大. 当考虑正 QPM 时, 如图 6(b0)—(b2) 所示, 子光束首先相互吸引, 向中心轴汇聚, 然后再相互排斥产生分裂. α 越大, 子光束就更早地完成聚焦, 焦平面更加靠近 $z=0$ 平面, 且焦平面变得更小. 当加入负 QPM 时, 光束聚焦现象消失, 光束随着传输距离的增加而产生分裂, 随着 α 的增大, 光束分裂现象逐渐减弱. 从图 6(a3)—(c3) HG 光束包络图可以清晰地看出光束在不同 QPM 下的

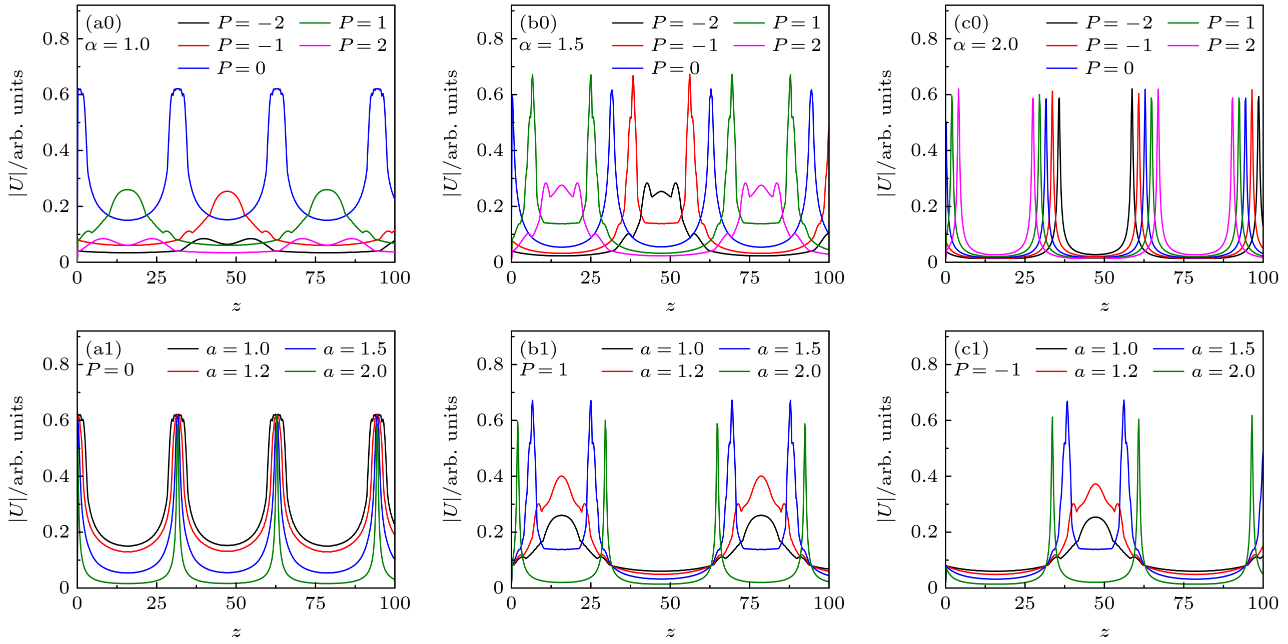


图 4 $\Omega = 0.1$时, 余弦调制 $D(z) = \cos(\Omega z)$下不同莱维指数 α 和 QPM 系数 p 的 HG 光束包络图

Fig. 4. Envelopes of HG beams for different Lévy index α and QPM coefficient p under cosine modulation $D(z) = \cos(\Omega z)$, here $\Omega = 0.1$.

聚焦特性. 当$p > 0$时, 光束的聚焦速度随着α的增大而变快, 其峰值振幅先增大后减小. $p < 0$时光束不再聚焦, 其能量随着传输距离的增加一直减小.

图 7 为幂函数调制 $D(z) = 1/z$下不同莱维指数α和 QPM 系数 p 的 HG 光束演化图. 当 QPM 系数$p = 0$时, 如图 7(a0)—(a2) 所示, HG 光束随着传输距离的增加逐渐转变为稳定结构. 当α增大时, 光束衍射效应增强, 束宽变得越来越大. 当幂函数调制和正 QPM 共同作用时, 两者可以共同调节 HG 光束的强度分布和相位特性. 如图 7(b0)—(b2) 所示, 当α较小时, 在一定距离内光束可以保持不失真直线传输. 随着α的增大, 衍射效应逐渐占主导地位, 当$\alpha = 2$时, 衍射效应最强, 光束经过短距离传输后自动聚焦一次, 然后逐渐转变为稳定结构演化. 当考虑负 QPM 作用时, 如图 7(c0)—(c2) 所示, 随着传输距离的增加, 光束的演化也呈现出稳定结构, 不同的是其束宽明显要大于没有 QPM 调制时光束的束宽. 从图 7(a3)—(c3) 看出, 当$p = 0$或$p = -1$时, 光束的能量先降低, 然后在一定距离内保持不变. 当$p = 1$时, 光束能量先增加再降低, 然后在一定传输距离内保持稳定状态.

由上述讨论可知, 在不同的纵向调制下, HG 光束呈现出不同的演化特性, 如周期性振荡传输, 抛物线状演化或逐渐趋于稳定的形态传输. 在 QPM 和余弦调制的影响下, 光束演化周期随着α或Ω的增大而减小. 在正 QPM 和线性调制的影响下, 光束聚焦位置随着α的增大而降低, 当添加负 QPM 时, 聚焦消失. 加入幂函数调制和正 QPM 时, 在α较小时, 光束保持长距离不失真传输. QPM 为负时, 聚焦消失, 但在一定距离内, 光束保持稳定性传输.

3.3 线性势下带有 QPM 调制的 HG 光束演化

本节讨论线性势 $V(x) = \beta x$ 作用下带有 QPM 的 HG 光束演化特性 ($D(z) = 1$), β 为线性势的线性系数. 从图 8(a0)—(a2) 可以看出, 加入线性势后, 由于线性相位占主导地位, 随着线性系数β的增加, 光束分裂现象逐渐消失, 右侧的子光束逐渐向左侧靠拢, 最终呈现出周期性传输, 传输路径类似于锯齿状. 此外, 随着β的增加, 线性势场越强, 光束在线性势场中的相位变化速度越快, 导致光束传输周期越小. 当考虑正 QPM 和线性势共同影响时, 如图 8(b0)—(b2) 所示, HG 光束的传输路径与$p = 0$时类似. 但由于正 QPM 会使 HG 产生自聚焦特性, 光束在经过一段距离传输后会自动聚焦一次, 然后继续保持锯齿状的传输路径传输. 当加入负 QPM 时, 光束聚焦现象消失, 受线性势场

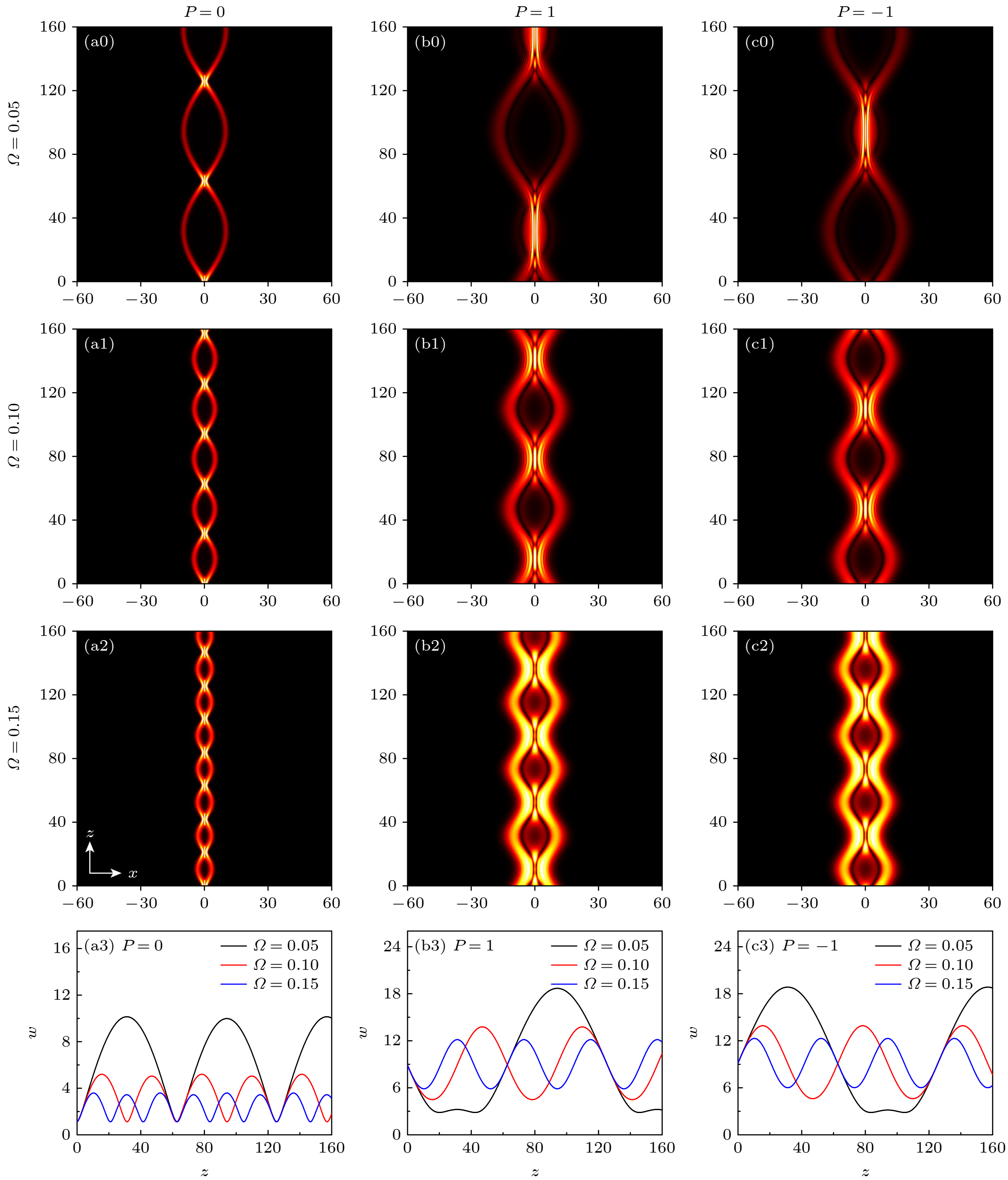


图 5 (a0)—(c2) 不同调制频率 Ω 和 QPM 系数 p 下 HG 光束演化图, $\alpha = 1$; (a3)—(c3) 束宽随传输距离 z 变化图

Fig. 5. (a0)–(c2) Evolution of HG beams for different modulation frequence and QPM coefficient p, here $\alpha = 1$; (a3)–(c3) the beam width varies with transmission distance z.

的影响, 光束随着线性系数 β 的增大也会展现出锯齿状周期性演化. 另外在 QPM 和线性势场的共同作用下, 由于 QPM 在横向上引起光束相位分布的不规则变化, 导致光束的束宽明显要大于无 QPM 的情况. 从图 8(a3)—(c3) 可以更加清晰地看出光束的演化特性. 当 $p = 0$ 时, 光束能量会随着传输距离的增加而降低. 当 $p = 1$ 时, 光束能量先增大后降低, β 越大, 光束更早的发生聚焦. 在 $p = -1$ 时, 光束的传输很稳定, 在传输过程中能量几乎保持不变, 其演化周期随着 β 的增大而降低.

图 9 展示了不同莱维指数 α 和 QPM 系数 p 下 HG 光束的演化. 随着 α 的增大, 光束衍射效应增强, 运动轨迹发生明显改变. 光束的偏转角度增加, 横向振幅明显增大. 受到线性势场影响, 该振

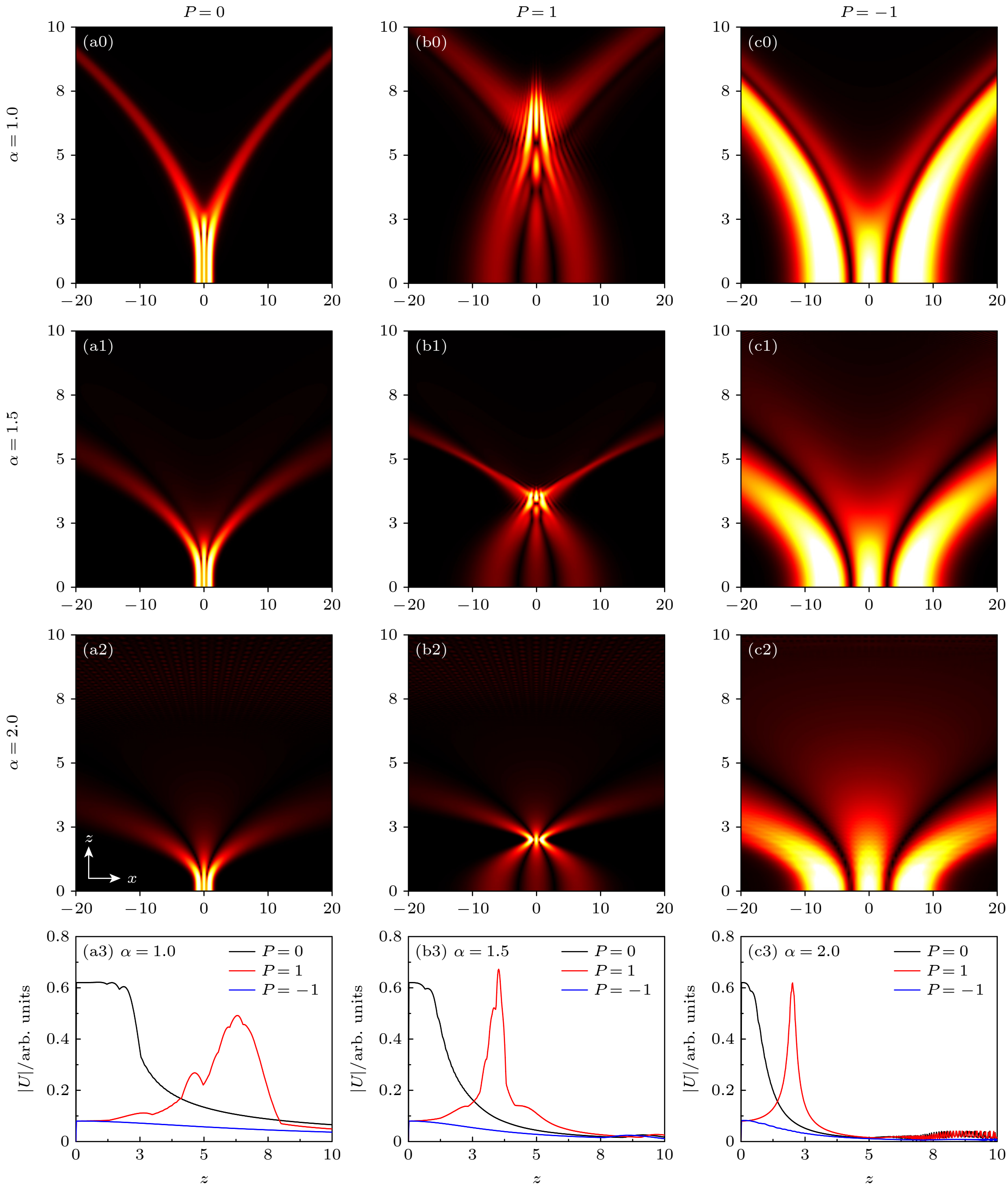


图 6 (a0)—(c2) 线性调制 $D(z)=z$ 下不同莱维指数 α 和 QPM 系数 p 的 HG 光束演化图; (a3)—(c3) 图 (a0)—(c2) 对应的包络图

Fig. 6. (a0)–(c2) Evolution of HG beams with different Lévy index α and QPM coefficient p under linear modulation $D(z)=z$; (a3)–(c3) the corresponding envelopes to panels (a0)–(c2).

荡向着 x 负空间延长, 其传输路径由类似分段直线形状转逐渐变成弯曲线形状. 然而光束的演化周期并不会因 α 的变化而改变. 当加入正 QPM 时, 如图 9(b0)—(b2) 所示, HG 光束发生聚焦的时间随 α 的增大而变的更早. 考虑负 QPM 时, 如图 9(c0)—(c2) 所示, 光束聚焦特性消失. 从图 9(a3) 束宽对比图可以看出, 在 QPM 和线性势共同作用下, QPM 对 HG 光束有着放大作用, 束宽明显大于 $p=0$ 时. 当加入正 QPM 时, 光束束宽先变小, 后增大, 再变小, 如此形成周期性变化. 而负 QPM 下光束的束宽变化与正 QPM 互为镜像对称. 从图 9(b3)—(c3) 光束包络图看出, 当 $p=1$ 时, 随着传输距离的增加, 光束先聚焦一次达到峰值振幅, 然后表现出弱振荡结构. 当 $p=-1$ 时, 光束表现为振荡特

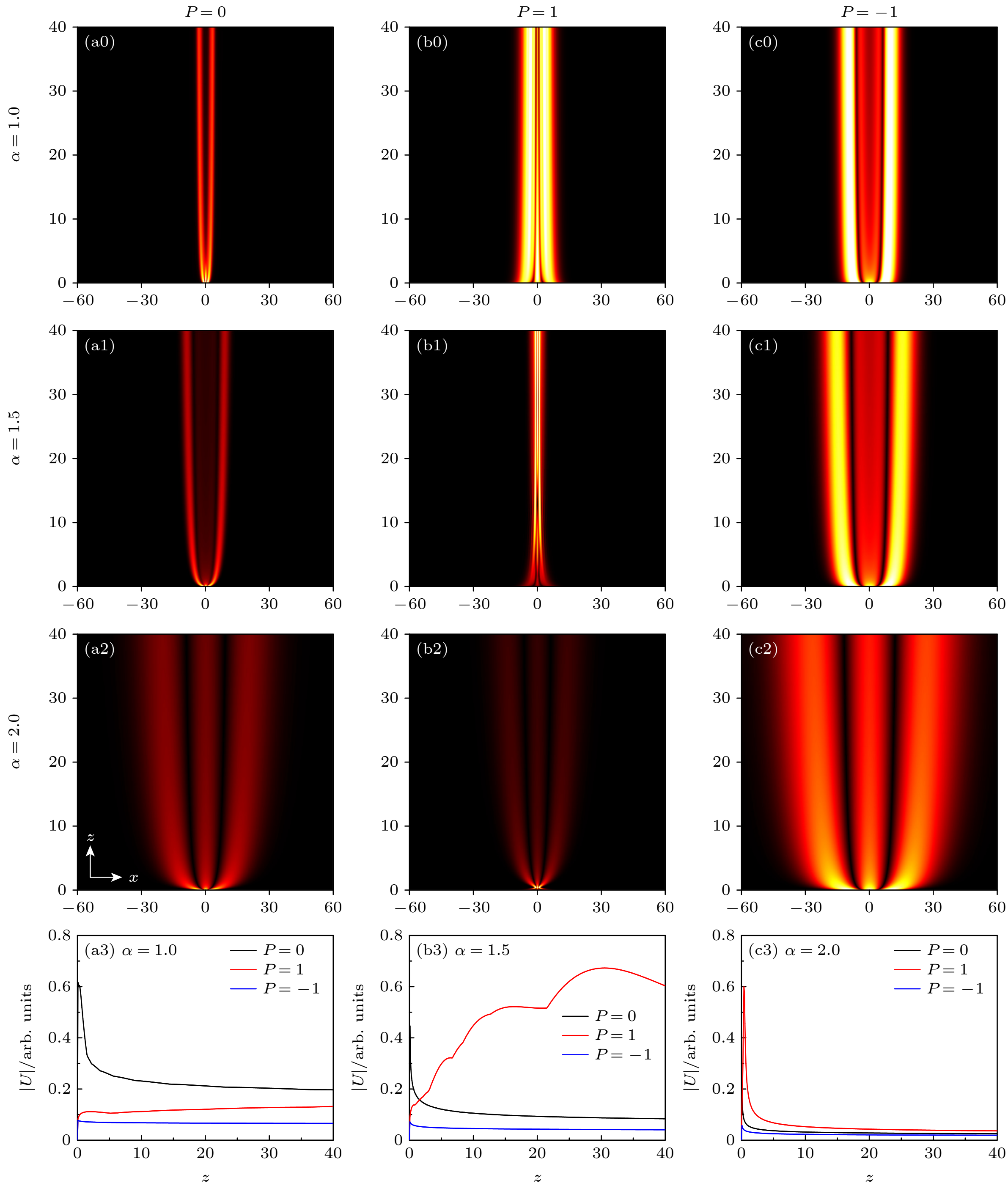


图 7 (a0)—(c2) 幂函数调制 $D(z)=1/z$ 下不同莱维指数 α 和 QPM 系数 p 的 HG 光束演化图; (a3)—(c3) 图 (a0)—(c2) 对应的包络图

Fig. 7. (a0)–(c2) Evolution of HG beams with different Lévy index α and QPM coefficient p under power function modulation $D(z)=1/z$; (a3)–(c3) the corresponding envelopes to panels (a0)–(c2).

性, 随着传输距离的增加, 光束之间的干涉更加强烈, 表现出强烈的振荡结构. 此外 α 的增大也会导致光束的振荡加剧. 基于本节讨论可知, 在线性势作用下光束呈现周期性演化, 通过调整 α 和 β 可以操控光束演化周期. 当考虑线性势和 QPM 共同影响时, 随着 α 的增大, 光束经过一段距离传输后会出现振荡.

3.4 抛物势下带有 QPM 的 HG 光束演化

本节讨论抛物势 $V(x,y)=1/2\mu^2\left(x^2+y^2\right)$ 作用下带有 QPM 的 HG 光束演化特性 ($D(z)=1$), μ 为抛物势的抛物系数. 从图 10(a0)—(a2) 可以看出, 在抛物势的作用下, HG 光束经过一段距离传输后自动聚焦, 再离焦, 再聚焦. 随着 α 的增大, 光

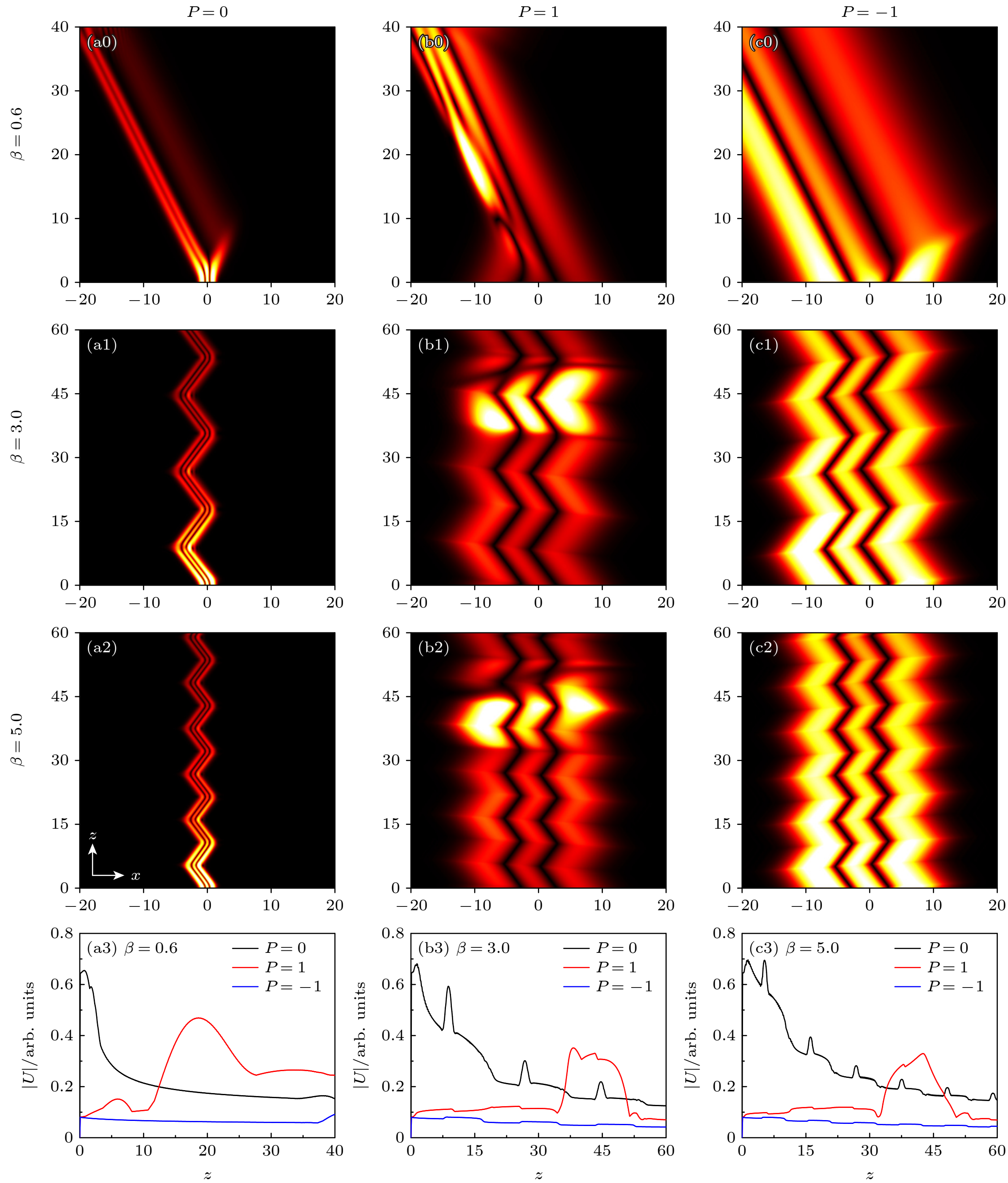


图 8 (a0)—(c2) 不同线性系数 β 和 QPM 系数 p 下 HG 光束演化图, $\alpha=1$; (a3)—(c3) 图 (a0)—(c2) 对应的包络图

Fig. 8. (a0)–(c2) Evolution of the HG beam for different linear coefficient β and QPM coefficient p, here $\alpha=1$; (a3)–(c3) the corresponding envelopes to panels (a0)–(c2).

束发生自动聚焦的速度更快, 横向振幅更大, 聚焦位置离初始位置更近, 焦距更短. 此外当 $\alpha=2$ 时, 光束呈现出周期性的自动聚焦、离焦特性. 当抛物势与 QPM 共同作用时, 如图 10(b0)—(c2) 所示, 光束也会呈现自动聚焦现象, 但是光束之间的干涉特别强, 光束散焦幅度更大, 束宽明显大于 $p=0$ 时. 当 $\alpha=2$ 时, 光束聚焦呈现周期性变化. 另外, 负 QPM 下光束的演化除了聚焦时间比 QPM 为正时略迟一点外, 其他演化特性相似. 从图 10(a3)—(c3) 包络图可以看出, 当 $\alpha=2$ 时, 光束呈现周期性聚焦, 而且 $p=0$ 时光束的峰值振幅要小于 $p\neq0$ 时. 当 $\alpha<2$ 时, 在抛物势和 QPM 共同影响下, 随着传输距离的增加, 光束之间的碰撞逐渐增加, 光束的振荡变得越来越强.

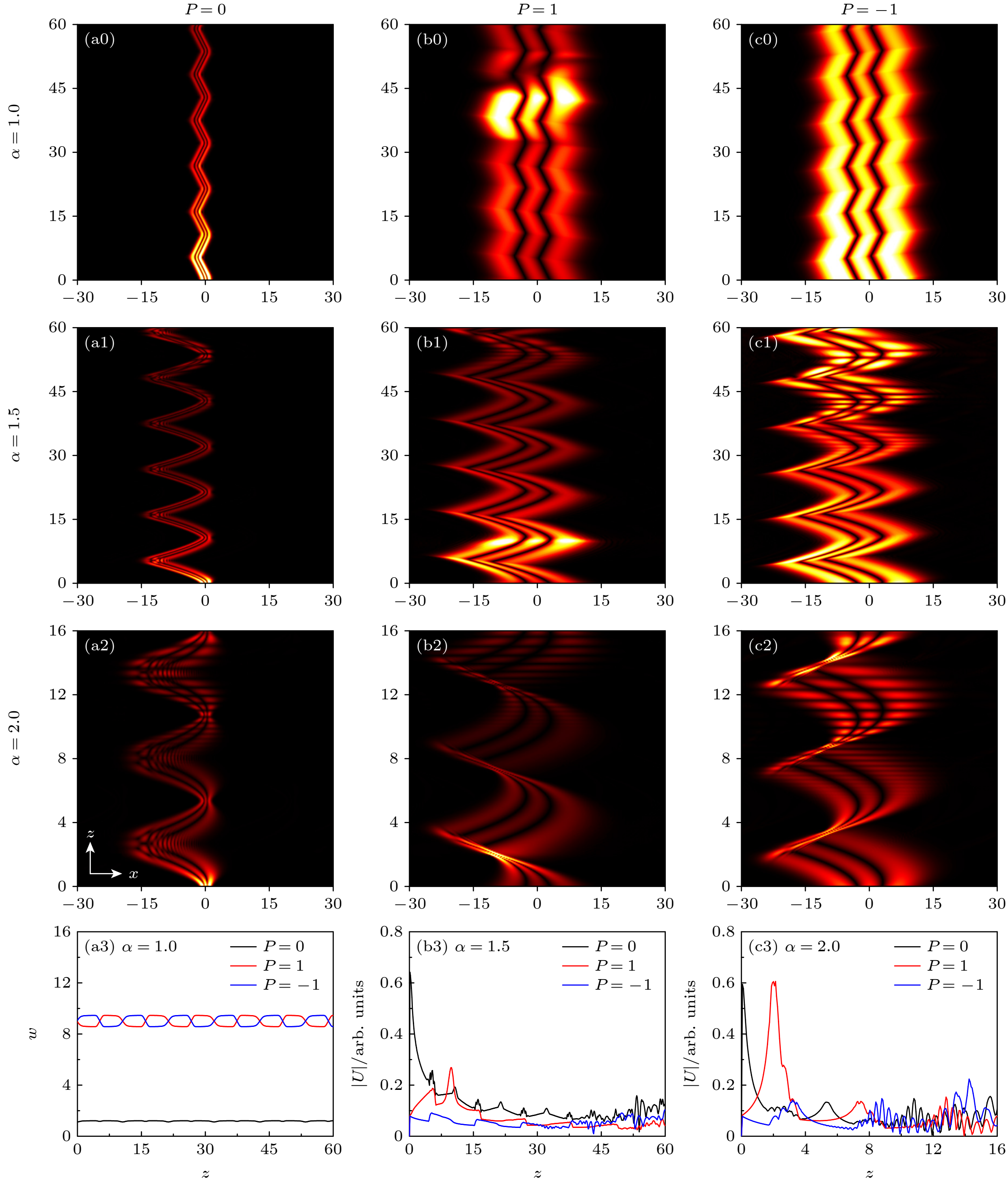


图 9 (a0)—(c2) 不同莱维指数 α 和 QPM 系数 p 下 HG 光束演化图, $\beta = 5$; (a3) 束宽随传输距离 z 变化图; (b3), (c3) 图 (a1)—(c2) 对应的包络图

Fig. 9. (a0)–(c2) Evolution of HG beams for different Lévy index α and QPM coefficient p, here $\beta = 5$; (a3) the beam width varies with transmission distance z; (b3), (c3) the corresponding envelopes to panels (a1)–(c2).

图 11 展示了不同抛物系数 μ 和 QPM 系数 p 下 HG 光束的演化. 由图 11(a0)—(c2) 可以看出, 光束在相同莱维指数 α 下随着抛物系数 μ 的增加光束自动聚焦的速度显著提升, 光束横向宽度变的更小. 这是因为 μ 越大, 抛物势场越强, 对光束约束能力更强, 使光束在更窄的空间内反射. 由包络图 11(a3)—(c3) 看出, 随着 μ 的增加, 光束在传输过程中相互作用的频率更高, 导致振荡行为更加明显. 由本节讨论结果可知, 在抛物势和 QPM 共同作用下, 光束会发生自动聚焦, 离焦变化. 可以通过调节抛物系数 μ, QPM 系数 p 以及莱维指数 α 来控制 HG 光束的传输特性.

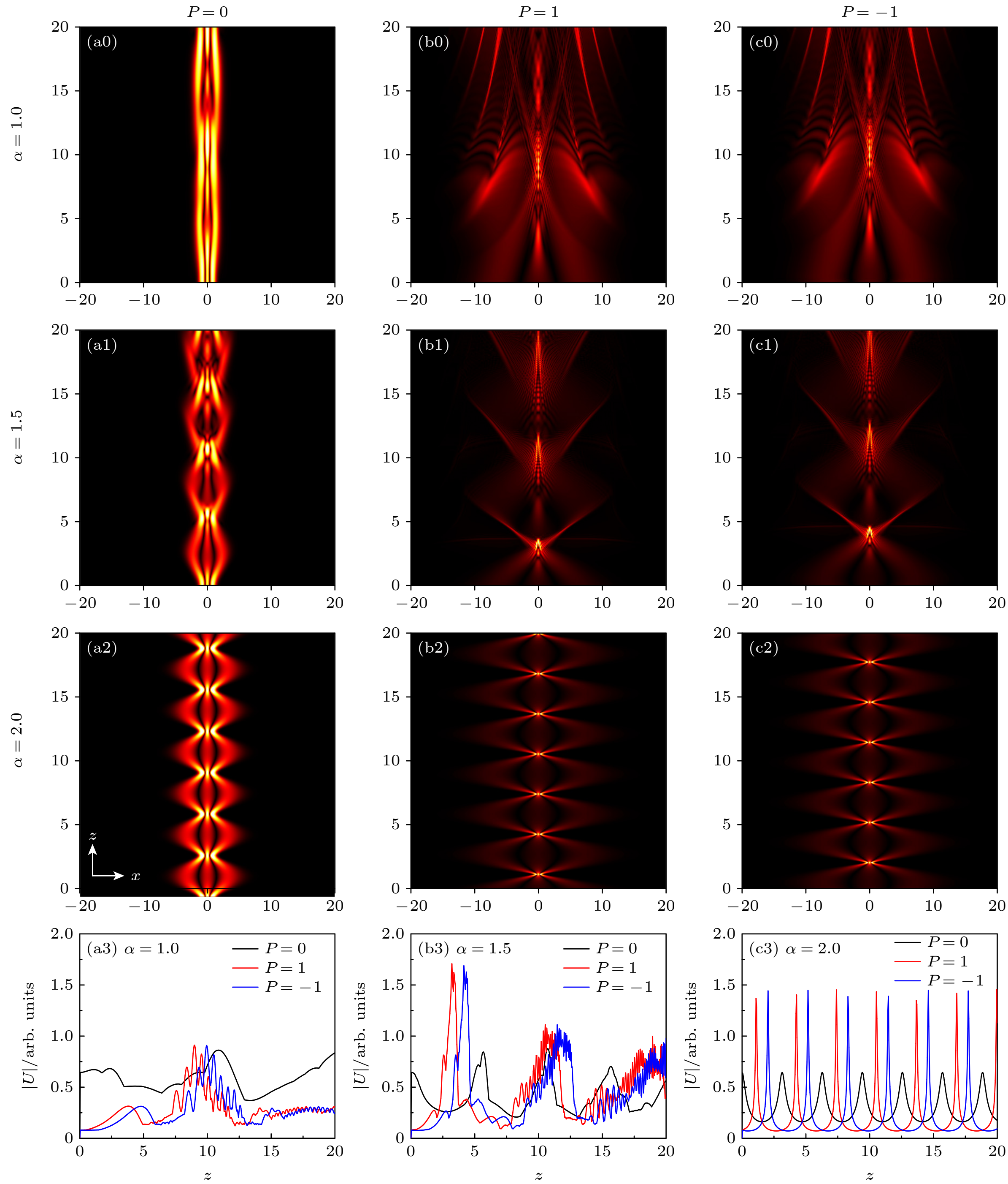


图 10 (a0)—(c2) 不同莱维指数 α 和 QPM 系数 p 下 HG 光束演化图, $\mu=1$; (a3)—(c3) 图 (a0)—(c2) 对应的包络图

Fig. 10. (a0)–(c2) Evolution of HG beams for different Lévy index α and QPM coefficient p, here $\mu=1$; (a3)–(c3) the corresponding envelopes to panels (a0)–(c2).

4 结 论

本文研究了 QPM 下 HG 光束在不同变系数和势的 FSE 中的传输特性. 当 HG 光束在自由空间传输时, 莱维指数的大小影响着光束的分裂. 当加入正 QPM 后, 光束在传输过程中具有自动聚焦特性, 聚焦位置随着 QPM 系数和莱维指数的改变而变化, 而负 QPM 使光束在传输过程中的聚焦特性消失. 在余弦调制存在的情况下, HG 光束的传输呈现出余弦轨迹的周期性振荡. 当 QPM 与余弦调制共同作用时, 光束呈现出一大一小的呼吸结构的周期性演化. QPM 的正负改变了大小呼吸结构的交替顺序. 调制频率可以改变光束演化周期. 加入线性调制后, HG 光束呈现出抛物线轨迹传输.

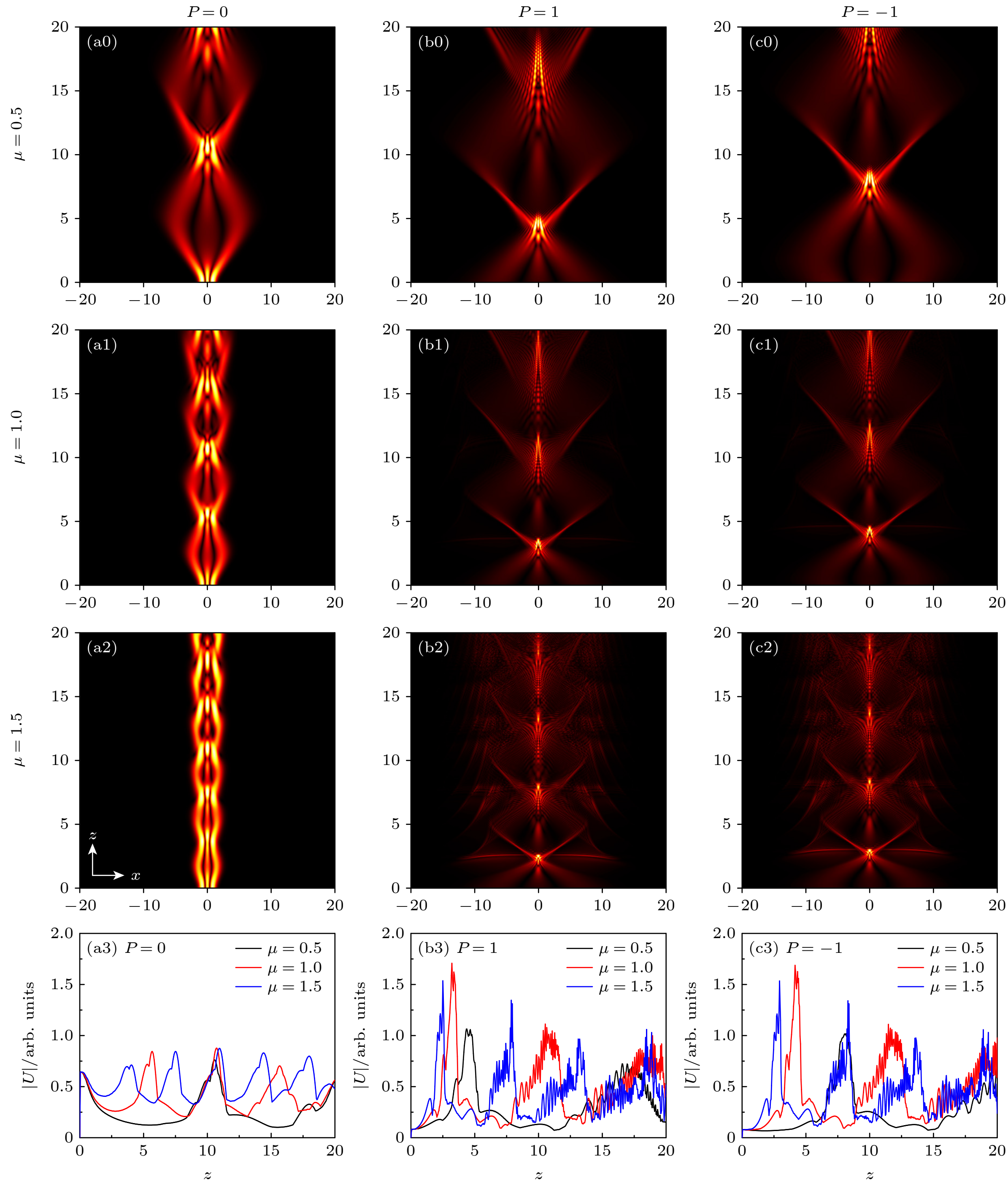


图 11 (a0)—(c2) 不同抛物系数 μ 和 QPM 系数 p 下 HG 光束演化图, $\alpha = 1.5$; (a3)—(c3) 图 (a0)—(c2) 对应的包络图

Fig. 11. (a0)–(c2) Evolution of HG beams for different parabolic coefficient μ and QPM coefficient p, here $\alpha = 1.5$; (a3)–(c3) the corresponding envelopes to panels (a0)–(c2).

QPM 为正时, 光束在传输过程中会自动聚焦, 为负时, 聚焦消失. 当幂函数调制和正 QPM 共同作用时, HG 光束在莱维指数较小时会保持长距离的不失真直线传输. 加入线性势后, 随着线性系数增大, HG 光束分裂现象逐渐减弱, 最终呈现出周期性演化. 光束的演化周期受线性系数的大小影响, 莱维指数的变化会改变光束的横向振幅. 此外, QPM 对光束有着放大作用. HG 光束在抛物势作用下会呈现出自聚焦, 离焦变化, 莱维指数和抛物系数的变化会改变光束聚焦速度和横向振幅. 当 QPM 和抛物势共同作用时, 无论 QPM 的正负如何, 光束都会呈现出自动聚焦, 离焦现象. 本文研究结果不仅充实了对分数薛定谔方程的研究, 还为光学聚焦和光学控制的应用提供了一定的参考价值.

参考文献

[1] Wang S L, Xu J P, Yang Y P, Cheng M J 2024 *Opt. Commun.* **556** 130258

[2] Zhou J H, Hu Q S 2023 *Opt. Express* **31** 38334

[3] Qiu Y Z, Liu Z R 2024 *Results Phys.* **58** 107457

[4] Sun Z Y, Deng D, Pang Z G, Yang Z J 2024 *Chaos, Solitons Fractals* **178** 114398

[5] Sun Z Y, Li J, Bian R, Deng D, Yang Z J 2024 *Opt. Express* **32** 9201

[6] Arfan M, Khaleel N, Ghaffar A, Razzaz F, Saeed S M, Alanazi T M 2024 *Opt. Quantum Electron.* **56** 135

[7] Wang Q, Zhu J Y, Wang J, Yu H Y, Hu B B 2024 *Chaos, Solitons Fractals* **180** 114580

[8] Zhou W Z, Li X P, Yang J, Yang T L, Wang X J, Liu B J, Wang H Z, Yang J B, Peng Q J 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 014204 (in Chinese) [周王哲, 李雪鹏, 杨晶, 杨天利, 王小军, 刘炳杰, 王浩竹, 杨俊波, 彭钦军 2023 物理学报 **72** 014204]

[9] Wang S, Wang L, Zhang F R, Kong L J 2022 *Chin. Phys. Lett.* **39** 104101

[10] Wu S M, Wang Q, Gao X H, Wang Y 2018 *Results Phys.* **10** 607

[11] Song L M, Yang Z J, Li X L, Zhang S M 2020 *Appl. Math. Lett.* **102** 106114

[12] Fan X L, Ji X L, Wang H, Deng Y, Zhang H 2021 *J. Opt. Soc. Am. A* **38** 168

[13] Sharma V, Thakur V, Singh A, Kant N 2021 *Chin. J. Phys.* **71** 312

[14] Ebel S, Talebi N 2023 *Commun. Phys.* **6** 179

[15] Che J R, Zheng Y X, Liang G, Guo Q 2023 *Chin. Phys. B* **32** 104207

[16] Saad F, Benzehoua H, Belafhal A 2024 *Opt. Quantum Electron.* **56** 130

[17] Laskin N 2000 *Phys. Lett. A* **268** 298

[18] Longhi S 2015 *Opt. Lett.* **40** 1117

[19] Zhang L F, Li C X, Zhong H Z, Xu C G, Lei D J, Li Y, Fan D Y 2016 *Opt. Express* **24** 14406

[20] Huang X W, Deng Z X, Shi X H, Fu X Q 2017 *J. Opt. Soc. Am. B: Opt. Phys.* **34** 2190

[21] Zhang L F, Zhang X, Wu H Z, Li C X, Pierangeli D, Gao Y X, Fan D Y 2019 *Opt. Express* **27** 27936

[22] Zang F, Wang Y, Li L 2018 *Opt. Express* **26** 23740

[23] Xin W, Song L J, Li L 2021 *Opt. Commun.* **480** 126483

[24] Huang X W, Deng Z X, Fu X Q 2017 *J. Opt. Soc. Am. B: Opt. Phys.* **34** 976

[25] Chen W J, Wang T, Wang J, Mu Y N 2021 *Opt. Commun.* **496** 127136

[26] Tan C, Lei T, Zou M, Liang Y, Tang P H, Liu M W 2024 *Opt. Commun.* **557** 130358

[27] Wen J J, Wang H W, Gao R, Ren S M, Guo T, Xiao Y 2023 *Optik* **276** 170586

[28] Tan C, Liang Y, Zou M, Lei T, Tang P H, Liu M W 2024 *J. Opt. Soc. Am. B: Opt. Phys.* **41** 921

[29] Zhang L F, Liu K, Zhong H Z, Zhang J G, Deng J Q, Li Y, Fan D Y 2015 *Sci. Rep.* **5** 11843

[30] Zhang J G, He J 2017 *IEEE Photonics J.* **9** 1

[31] Zhan K Y, Jiao R Y, Wang J, Zhang W Q, Yang Z D, Liu B 2020 *Ann. Phys.* **532** 1900546

[32] Zhan K Y, Zhang W Q, Jiao R Y, Dou L C, Liu B 2020 *Opt. Commun.* **474** 126156

[33] Jiao C Y, Huang X W, Bai Y F, Fu X Q 2023 *J. Opt. Soc. Am. A* **40** 2019

Dynamics of quadratic phase controlled Hermite-Gaussian beams in fractional systems based on different variable coefficients and potentials*

Tan Chao [1)] Liang Yong [1)] Zou Min [2)†] Lei Tong [1)] Chen Long [1)] Tang Ping-Hua [3)] Liu Ming-Wei [1)‡]

1) (*School of Information and Electrical Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan* 411201, *China*)

2) (*School of Chemistry and Chemical Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan* 411201, *China*)

3) (*School of Physics and Optoelectronics, Xiangtan University, Xiangtan* 411105, *China*)

(Received 24 March 2024; revised manuscript received 11 May 2024)

Abstract

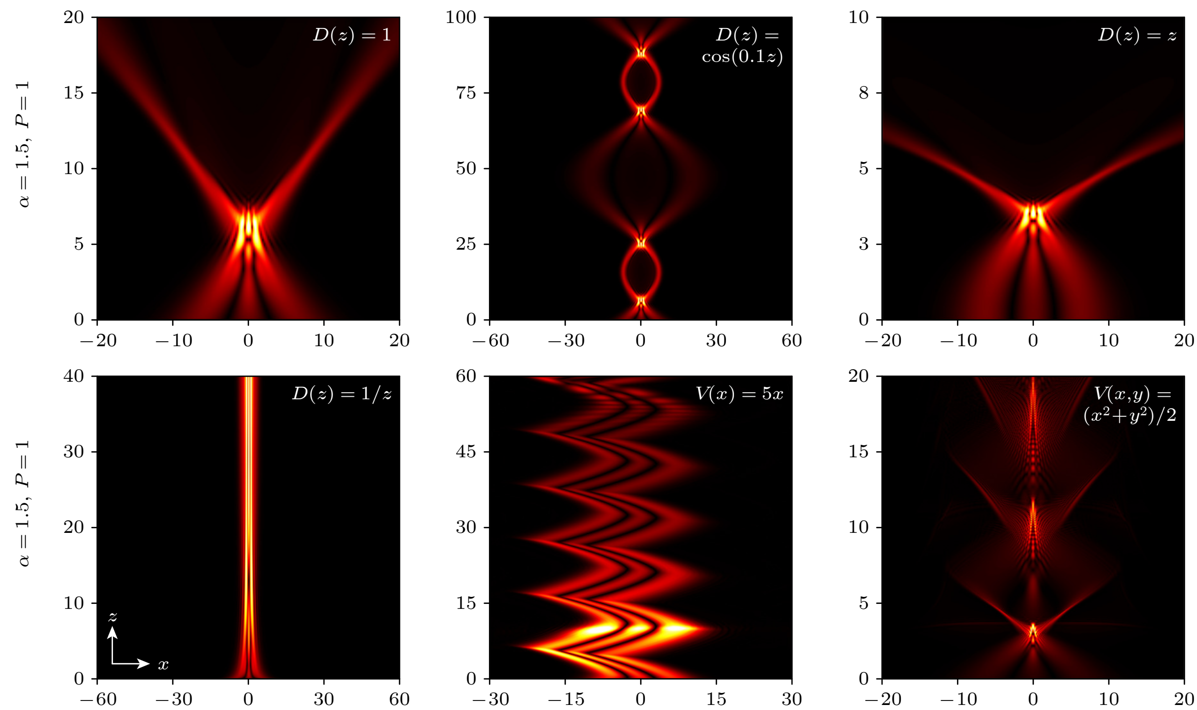
The Hermite-Gaussian (HG) beam has many potential advanced applications in optical communications, electron acceleration, nonlinear optics and bio-optical disease detection, owing to its distinctive mode and intensity distribution. The research on HG beam are significant in the development of optics, medicine and quantum technology. However, the controlling of the evolutions of HG beam with quadratic phase modulation

* Project supported by the Hunan Provincial Natural Science Foundation of China (Grant No. 2022JJ30264) and the Scientific Research Fund of Education Department of Hunan Province, China (Grant Nos. 21B0476, 21B0136, 22B0479).

† Corresponding author. E-mail: minzou@hnust.edu.cn

‡ Corresponding author. E-mail: phymwliu@foxmail.com

(QPM) in fractional systems under variable coefficients and potentials has been rarely studied. In this work, the propagation dynamic behaviors of the HG beam with QPM are investigated based on the fractional Schrödinger equation (FSE) under different variable coefficients and potentials by using a split-step Fourier algorithm. In the free space, the focusing spot of the beam becomes larger as the positive QPM coefficient increases or the Lévy index decreases. The QPM coefficient has little effect on the focusing amplitude when the Lévy index is 2. When the QPM coefficient is negative, the focusing of the beam disappears. Under the joint action of cosine modulations and QPM, the transmission of the beam oscillates not by the cosine law, but presents a large and a small breathing structure. The positive and the negative coefficient of QPM only alter the breathing sequence. The evolution period and width of the beam decrease as the modulation frequency increases. The trajectory of split beams turns into a parabolic shape under the linear modulation. In the joint influence of linear modulations and QPM, the HG beam exhibits either focusing or not focusing. Furthermore, the focusing position and focal plane of the beam decrease as the Lévy index increases. When the Lévy index is small, the beam keeps a straight-line transmission without distortion at a longer distance under the joint effect of the power function modulation and a positive QPM. The transmission of the beam also stabilizes and the beam width becomes larger with a negative QPM. Under a linear potential, the splitting of the HG beam disappears with the increase of the linear coefficient and shows a periodic evolution. The propagation trajectory of the beam shows a serrated pattern. By adding QPM, the beam is significantly amplified. Additionally, the evolution period of the beam is inversely proportional to the linear coefficient, and the transverse amplitude turns larger as the Lévy index increases. The interference among beams is strong, but it also exhibits an autofocus-defocusing effect under the joint action of a parabolic potential and QPM. In addition, the positive coefficient and the negative coefficient of QPM only affect the focusing time of the beam. The frequency of focusing increases as the Lévy index and parabolic coefficient rise. These features are important for applications in optical manipulations and optical focusing.



Keywords: fractional Schrödinger equation, Hermite-Gaussian beam, quadratic phase modulation, variable coefficients and potentials

PACS: 42.65.–k, 42.81.Dp **DOI:** 10.7498/aps.73.20240427

物理学报 Acta Physica Sinica
Chinese Physical Society
Institute of Physics, CAS

基于不同变系数和势场的分数系统中二次相位调控厄米-高斯光束动力学

谭超 梁勇 邹敏 雷同 陈龙 唐平华 刘明伟

Dynamics of quadratic phase controlled Hermite–Gaussian beams in fractional systems based on different variable coefficients and potentials

Tan Chao Liang Yong Zou Min Lei Tong Chen Long Tang Ping-Hua Liu Ming-Wei

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 73, 134205 (2024) DOI: 10.7498/aps.73.20240427
在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.73.20240427
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in