

## 铁磁绝缘体中磁振子的非平衡稳态输运性质\*

杨栋超<sup>1) #</sup> 易立志<sup>1) #</sup> 丁林杰<sup>2)</sup> 刘敏<sup>1)</sup> 朱丽娅<sup>1)</sup> 许云丽<sup>1)</sup>何雄<sup>1)</sup> 沈顺清<sup>3)</sup> 潘礼庆<sup>1) †</sup> John Q. Xiao<sup>4) ‡</sup>

1) (三峡大学理学院, 湖北省弱磁探测工程技术研究中心, 宜昌 443002)

2) (三峡学院物理系, 重庆 404100)

3) (香港大学物理系, 香港 999077)

4) (Department of Physics and Astronomy, University of Delaware, Newark 19716, USA)

(2024 年 4 月 11 日收到; 2024 年 5 月 17 日收到修改稿)

玻色子体系中的非平衡输运过程研究是极具挑战性的工作. 磁振子是玻色子, 具有与电子等费米子截然不同的自旋输运行为. 本文以钇铁石榴石 (YIG) 铁磁绝缘体为研究对象, 聚焦影响稳态下 YIG 中磁振子非平衡输运过程的关键因素. 通过将具有非零化学势  $\mu_m$  的玻色-爱因斯坦统计函数引入到玻尔兹曼输运方程中, 获得了以  $\alpha$  为幂次的输运方程严格解析表达式 (当  $\alpha (= -\mu_m/(k_B T)) < 1$  时). 结果显示, 当  $\alpha \ll 1$  时, 我们得到了与以往研究不同的化学势  $\mu_m$  与非平衡粒子浓度  $\delta n_m$  之间的非线性关系  $\delta n_m \propto -\alpha^{1/2} \propto -(-\mu_m)^{1/2}$ ;  $\alpha$  较大时, 则还须考虑其高阶项. 正因这种非线性关系, 导致磁振子扩散方程显著不同于电子自旋扩散特性, 其由线性微分方程演变为更复杂的非线性微分方程. 本文重点研究了在两种极端温度梯度 (即  $\nabla T \sim 1$  K/mm 和  $10^4$  K/mm) 下非平衡磁振子浓度  $\delta n_m$  和化学势  $\mu_m$  的空间分布, 它们分别对应于  $\mu_m$  的值约为  $-0.1$   $\mu$ eV 和  $-6.2$  meV, 均满足前提条件  $\alpha < 1$ . 在远离平衡态的大温度梯度分布下, 本文理论计算与实验结果吻合很好. 这些理论研究结果将加深人们对铁磁绝缘体中磁振子非平衡输运行为的认识.

**关键词:** 磁振子, 非平衡输运, 化学势, 磁振子扩散方程, 玻尔兹曼输运方程**PACS:** 72.25.-b, 75.30.Ds, 75.76.+j**DOI:** 10.7498/aps.73.20240498

## 1 引言

自旋波是磁有序系统中局域磁矩在外场激发下的非一致进动, 其元激发量子又称为磁振子. 在自旋电子学中, 它是除电子自旋之外, 传递自旋角动量的另一重要载体<sup>[1,2]</sup>. 相对于电子的费米子属性, 磁振子是行为类似于光子、声子等的玻色子, 服从玻色-爱因斯坦分布. 利用磁振子系统可以有效地研究玻色-爱因斯坦凝聚<sup>[3]</sup>、热驱动磁振子流

输运<sup>[4]</sup>以及磁振子-声子弛豫的超快过程<sup>[5]</sup>等玻色子的非平衡现象. 在实验上, 磁振子的自旋塞贝克效应 (SSE) 提供了一种方便有效的电学测量手段来探测磁振子流<sup>[6-8]</sup>, 如图 1 所示. 具体过程是指在铁磁绝缘体 (MI)/重金属 (HM) 双层膜中, 通过施加温度梯度, 在 MI 中热激发的磁振子流注入到 HM 层, 并在 HM 层中通过逆自旋霍尔效应将磁振子自旋流转化为电荷流, 从而用电学方法探测到. 目前, 利用 SSE 已经对各种磁性材料中磁振子流的输运性能进行了广泛的研究<sup>[9-14]</sup>. 由于磁振子自

\* 国家自然科学基金 (批准号: 12274258) 和美国国家科学基金 (批准号: DMR1505592) 资助的课题.

# 同等贡献作者.

† 通信作者. E-mail: lpan@ctgu.edu.cn

‡ 通信作者. E-mail: jqx@udel.edu

旋扩散长度可达微米量级, 因此与传统的电子自旋器件相比, 磁振子器件热耗散更低. 其在低能耗信息处理、微波到 THz 通信、量子计算等领域具有广泛的应用前景<sup>[2,15,16]</sup>.

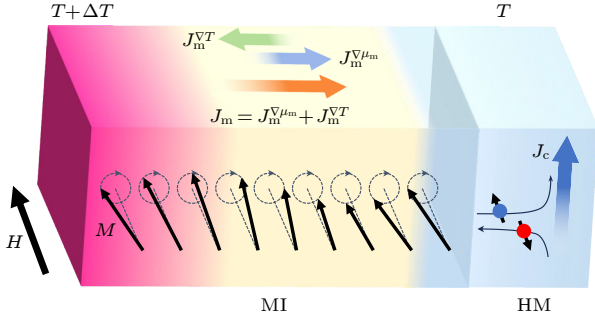


图 1 磁振子自旋塞贝克效应示意图, 铁磁绝缘体 (MI) 磁振子流的两个来源是温度梯度  $\nabla T$  和化学势梯度  $\nabla \mu$ , 磁振子流进入近邻的重金属层 (HM), 由 HM 中逆自旋霍尔效应进行探测

Fig. 1. Schematic diagram of magnon spin Seebeck effect. The two sources of magnon current in ferromagnetic insulators (MI) are temperature gradient  $\nabla T$  and chemical potential gradient  $\nabla \mu$ . Magnon current enters the neighboring heavy metal layer (HM) and is detected by the inverse spin Hall effect.

当对 MI 施加温度梯度时, 热激发的磁振子从非平衡暂态演化到最终的平衡稳态. 在大多数情况下, 非平衡稳态被视为许多准平衡态的集合, 然而, 这两者之间存在根本区别. 尽管过去 10 年对热激发的磁振子流的玻尔兹曼输运理论进行了大量研究<sup>[17–19]</sup>, 但仍存在大量模糊不清的地方. 首先, 我们强调磁振子化学势  $\mu_m$  在输运理论中的重要性. 在平衡状态下, 由于磁振子耗散, 因此该系统具有非守恒粒子数和零化学势的系统; 然而, 在非平衡稳态输运中, 磁振子的动量弛豫时间 (ps 量级) 明显短于其湮灭时间 (100 ns 量级)<sup>[18]</sup>, 导致磁振子数近似守恒, 此时化学势不再为零<sup>[5,20]</sup>. 由于磁振子化学势通常较小, 只在  $\mu\text{eV}$ — $\text{meV}$  量级, 其作用可能在 SSE 实验中被忽视<sup>[17]</sup>. 但不可否认, 化学势梯度与温度梯度一样, 是 MI 中磁振子输运过程中另一个具有统计学意义的驱动力. 目前实验上精确地测量  $\mu_m$  值仍具有挑战性. 根据报道, 有两种方法可以测量  $\mu_m$ <sup>[20–22]</sup>, 其一是用布里渊散射光谱来测量磁振子数随频率的分布, 通过用分布函数拟合得到化学势; 其二是用金刚石氮空位单自旋磁矩探测器测量局域磁矩的弛豫过程来探测化学势.

另一个急需解决的问题是如何获得磁振子输

运过程的完整解析表达式. 最近, Olsson 等<sup>[20]</sup> 采用激光照射 YIG 薄膜以产生大温度梯度 ( $10^4 \text{ K/mm}$ ), 利用布里渊散射技术探测磁振子分布, 证明了实验中的最大化学势在几百  $\mu\text{eV}$  量级. 然而, 值得一提的是, 该实验中的温度梯度比传统的 SSE 实验 ( $1 \text{ K/mm}$ ) 大 4 个数量级, 磁振子系统明显已远离平衡态, 此时更需要评估化学势与非平衡粒子数之间的线性近似理论是否适用. 若不适用, 就需要更精确的磁振子输运理论模型和解析表达式来描述真实的输运过程. 在构建这种精确的理论模型时, 会遇到两个困难: 首先是用于计算磁振子输运参数的 B-E 积分, 它在  $\varepsilon = \mu_m$  处发散. 需要指出的是, 玻色子系统的化学势是个负值. 对磁振子系统来说, 其化学势的绝对值是  $\mu\text{eV}$  到  $\text{meV}$  的小量, 远小于有限温度下的磁振子能量  $\text{meV}$ . 在计算磁振子输运系数时, 由于磁振子能量大于 0, 因此对输运系数包含的对 B-E 积分的积分区间为最低能级到正无穷. 由于 B-E 积分在  $\varepsilon = \mu_m$  处发散,  $\mu_m$  又是个小量, 因此低能级磁振子的 B-E 积分对  $\mu_m$  的值十分敏感. 另外,  $\mu_m$  的绝对值可作为其偏离平衡态的度量, 那么如何在磁振子输运参数的表达式中引入化学势就是要解决的另一个问题, 先前的研究表明, 这些参数通常是以  $\mu_m$  的幂次进行展开. 在这方面, 利用过去经常被忽略的可用于 B-E 积分的 Robinson 展开<sup>[23]</sup> 可以方便地获得严谨的解析式, 以更准确地理解磁振子输运的全过程.

本文从半经典玻尔兹曼输运方程出发, 研究了 MI 中的热激发磁振子输运现象, 并在非平衡态玻色子系统中应用 Robinson 展开对 B-E 积分进行处理, 从而得到了磁振子流和相关磁振子输运参数的表达式. 我们发现磁振子化学势  $\mu_m$  与非平衡磁振子数  $\delta n_m$  之间存在非线性关系  $\delta n_m \propto -(-\mu_m)^{1/2}$  ( $\alpha \ll 1$ ), 这显著不同于电子自旋费米子体系中的线性关系  $\delta n \propto \mu$ . 另外, 我们重新推导了磁振子扩散方程, 得到了非平衡磁振子分布, 并与实验结果进行了比较.

## 2 结果与讨论

### 2.1 MI 中磁振子玻尔兹曼输运理论

当在 MI 中施加温度梯度并产生磁振子流时, 磁振子通过两种类型的相互作用建立稳态: 1) 弹性散射, 磁振子的数量不变, 如磁振子-磁振子相互

作用; 2) 非弹性散射, 磁振子的数量可变化, 如磁振子与声子、晶格缺陷和晶界的散射. 这种宏观输运稳态可以用弛豫时间近似下的玻尔兹曼输运方程来描述<sup>[24]</sup>:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{k}} f \cdot \frac{d\mathbf{k}}{dt} + \nabla_{\mathbf{r}} f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{\delta f}{\tau_m}, \quad (1)$$

其中,  $f(\varepsilon) = 1 / \left[ \exp \left( \frac{\varepsilon - \mu_m}{k_B T} \right) - 1 \right]$  是 B-E 分布函数, 分布函数偏离平衡态的大小可记为  $\delta f = f - f_0$ , 其中  $f_0$  为平衡态的普朗克分布,  $\tau_m$  表示碰撞间的磁振子弛豫时间. 稳态时有  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ . 在温度梯度作用下, 磁振子会感受一个统计力, 但没有机械力, 因此,  $\hbar \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \mathbf{F} = 0$ . 设磁振子流沿  $x$  方向传输, 分布函数偏移量  $\delta f$  可表示为

$$\delta f = \tau_m v_x \left( \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \left( \nabla \mu_m - \frac{\varepsilon - \mu_m}{T} \nabla T \right). \quad (2)$$

通常研究中<sup>[17-19]</sup>均假设在弱外磁场情况下,  $f$  仅仅略微偏离平衡态, 从而允许在求解玻尔兹曼输运方程时采用普朗克分布  $f_0$  近似, 那么, 方程(2)将转化为  $\delta f = \tau_m v_x \left( \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \left( \nabla \mu_m - \frac{\varepsilon}{T} \nabla T \right)$ . 本文未采用这种近似, 而是通过引入化学势  $\mu_m$ , 并用其多项式展开, 得到了磁振子输运参数的解析表达式. 这种方法可以直观地分析  $\mu_m$  在磁振子输运过程中的作用. MI 中  $x$  方向的磁振子流密度 ( $\text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ ) 可以表示为如下形式:

$$J_m = \frac{1}{(2\pi)^3} \int v_x \cdot \delta f d\mathbf{k} = -\sigma_m \nabla \mu_m - \alpha_m \nabla T, \quad (3a)$$

其中

$$\sigma_m = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tau_m \cdot v_x^2 \left( -\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) d\mathbf{k}, \quad (3b)$$

$$\alpha_m = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tau_m \cdot v_x^2 \cdot \frac{\varepsilon - \mu_m}{T} \left( -\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) d\mathbf{k}, \quad (3c)$$

因此,  $\sigma_m = \frac{\tau_m}{3\pi^2 \hbar^2 D^{1/2}} K_0$ ,  $\alpha_m = \frac{\tau_m}{3\pi^2 \hbar^2 D^{1/2} T} K_1$ , 并且  $K_n = \int_0^\infty (\varepsilon - \mu)^n \varepsilon^{3/2} \left( -\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) d\varepsilon$ . 这里采用

磁振子的平方色散关系:  $\hbar\omega = Dk^2 + \Delta_g$ <sup>[18]</sup>, 式中  $D$  是交换刚度常数,  $\Delta_g = g\mu_B B$  是塞曼能, 其中  $g$ ,  $\mu_B$ ,  $B$  分别是朗德  $g$  因子、玻尔磁子和磁感应强度. 为简化后续计算, 令  $\Delta_g$  为 0. 这个公式表明磁振子流是由两个统计力驱动的: 化学势梯度项  $j_m^{\nabla\mu}$  和温度梯度项  $j_m^{\nabla T}$ , 其中负号表示磁振子流沿着与梯度相

反的方向流动. 然而, 如果没有后续的数学推导, 获得  $K_n$  积分的解析式仍极具挑战.

B-E 积分函数表示为

$$g_\sigma(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1}}{e^{x+\alpha} - 1} dx, \quad (4)$$

其中  $x = \frac{\varepsilon}{k_B T}$ ,  $\alpha = -\frac{\mu_m}{k_B T}$ ,  $\Gamma(x)$  表示 Gamma 函数. 对于费米子体系, 可以在教科书中找到常用的 Sommerfeld 展开式. 然而, 在分析玻色子系统的物理性质时, 可用于 B-E 积分的 Robinson 展开式往往被忽略. 当  $\alpha$  较小时 ( $\alpha < 1$ ), B-E 积分具有  $\alpha$  次幂的展开式<sup>[23]</sup>:

$$g_\sigma(\alpha) = \Gamma(1-\sigma)\alpha^{\sigma-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \zeta(\sigma-n)\alpha^n, \quad (5)$$

其中  $\zeta(x)$  为黎曼  $\zeta$  函数. 表达式中第  $n+1$  项小于第  $n$  项, 并且随着  $n$  增大而趋于 0, 这意味着该表达式具有收敛性, 这也是利用它展开积分  $K_n$  的先决条件. 因此, 可以得到:

$$\sigma_m = \frac{\pi^{1/2} \tau_m}{h^2 D^{1/2}} (k_B T)^{3/2} g_{3/2}(\alpha), \quad (6)$$

$$\alpha_m = \frac{\pi^{1/2} \tau_m k_B^{5/2} T^{3/2}}{h^2 D^{1/2}} \left[ \frac{5}{2} g_{5/2}(\alpha) + \alpha g_{3/2}(\alpha) \right]. \quad (7)$$

与方程(2)中采用  $f \approx f_0$  近似的结果相比, 我们给出了包含  $\alpha$  幂次的高阶项的严格表达式. 文献<sup>[17, 25]</sup>中给出了磁振子电导率  $\sigma_m$  的不同定义形式, 但本文给出的磁振子电导率  $\sigma_m$  更具有一般性, 因为它直接来源于 B-E 分布和玻尔兹曼方程.

磁振子自旋塞贝克系数  $S_m$  定义如下:

$$S_m = \frac{\alpha_m}{\sigma_m} = \frac{\left[ \frac{5}{2} g_{5/2}(\alpha) + \alpha g_{3/2}(\alpha) \right]}{g_{3/2}(\alpha)} k_B, \quad (8)$$

当  $\alpha = 0$  时处于平衡状态, 计算得到  $S_m$  为一常数  $1.28 k_B$  ( $k_B$  为玻尔兹曼常数). 磁振子数浓度  $n_m$  为

$$n_m = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f(\varepsilon) d\mathbf{k} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(\alpha), \quad (9)$$

其中,  $\lambda = \sqrt{\frac{4\pi D}{k_B T}}$ , 为平均磁振子热波长.

上文已经给出了磁振子输运参数的严格解析式. 举一个例子, 考虑 300 K 时的实验温度梯度  $10^4 \text{ K/mm}$ <sup>[20]</sup>, 当  $|\mu| \sim 300 \text{ } \mu\text{eV}$  时,  $\alpha$  为 0.012, 仍然满足 Robinson 展开式的前提条件, 即  $\alpha < 1$ . 前 4 项的  $\alpha^2$  展开式如下:



$$\sigma_m = \frac{\pi^{1/2} \tau_m}{h^2 D^{1/2}} (k_B T)^{3/2} \left[ \zeta\left(\frac{3}{2}\right) + \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \alpha^{1/2} - \zeta\left(\frac{1}{2}\right) \alpha + \frac{1}{2} \zeta\left(-\frac{1}{2}\right) \alpha^2 + \dots \right], \quad (10a)$$

$$\alpha_m = \frac{\pi^{1/2} \tau_m}{h^2 D^{1/2}} (k_B T)^{3/2} k_B \left\{ \frac{5}{2} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \alpha + \left[ \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2} \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) \right] \alpha^{3/2} + \frac{1}{4} \zeta\left(\frac{1}{2}\right) \alpha^2 + \dots \right\}, \quad (10b)$$

$$S_m \approx \frac{5}{2} \frac{1}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \left\{ \zeta\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \zeta\left(\frac{5}{2}\right)}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \alpha^{1/2} + \left[ \frac{\zeta\left(\frac{1}{2}\right) \zeta\left(\frac{5}{2}\right)}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} - \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \right] \alpha + \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \alpha^{3/2} + \dots \right\} k_B, \quad (10c)$$

$$n_m = \left( \frac{k_B T}{4\pi D} \right)^{3/2} \left[ \zeta\left(\frac{3}{2}\right) + \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \alpha^{1/2} - \zeta\left(\frac{1}{2}\right) \alpha + \frac{1}{2} \zeta\left(-\frac{1}{2}\right) \alpha^2 + \dots \right], \quad (10d)$$

$$\delta n_m = n_m(\alpha) - n_m(0) = \left( \frac{k_B T}{4\pi D} \right)^{3/2} \left[ \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \alpha^{1/2} - \zeta\left(\frac{1}{2}\right) \alpha + \frac{1}{2} \zeta\left(-\frac{1}{2}\right) \alpha^2 + \dots \right]. \quad (10e)$$

(10e) 式给出了非平衡粒子数  $\delta n_m$  随  $\alpha$  的变化关系, 见图 2 所示 (其中  $T=300$  K,  $D=1.0027 \times 10^{-39}$  J·m<sup>2</sup>). 在  $\alpha \rightarrow 0$  时,  $\partial \delta n_m / \partial \alpha \rightarrow \infty$ , 图中虚线就是线性近似的示意图, 接近水平, 因此, 采用线性近似会带来极大的偏差. 当  $\alpha = 0$  时, 上述结果对应于平衡状态,  $n_m$  仅保留第一项常数项. 第 2 项  $\alpha^{1/2}$  对于玻色系统而言至关重要. 以  $n_m$  为例, 假设  $\alpha = 1\%$ , 第 2 项  $\Gamma(-1/2) \alpha^{1/2} = -0.35$ , 从而在第 1 项  $\zeta(3/2) = 2.61$  中引入了显著修正项 (导致  $n_m$  约 -13.6% 的变化). 但是, 通常 300 K 情况下, 温度梯度仅为 1 K/mm, 对应的  $\mu_m$  在 0.1  $\mu$ eV 量级, 导致  $\alpha$  数值在可忽略的量级  $10^{-5}$ . 在某些情况下,  $\alpha$  的高阶项的确会对输运性能产生显著影响 (见 2.2 节的讨论), 此时, 非平衡磁振子浓度  $\delta n_m$  和磁振子化学势  $\mu_m$  之间的关联需要利用  $\alpha$  的更多高阶项.

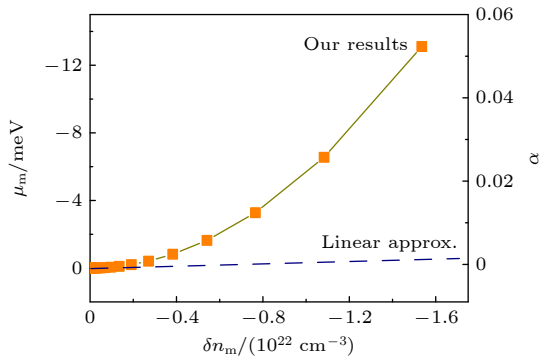


图 2 非平衡粒子数  $\delta n_m$  随化学势  $\mu_m$  和  $\alpha$  的变化规律  
Fig. 2. The variation of nonequilibrium magnon density  $\delta n_m$  with chemical potential  $\mu_m$  and  $\alpha$ .

至此, 温度场中磁振子流的玻尔兹曼输运方程获得了更严格的求解, 其中磁振子化学势  $\mu_m$  及其

与磁振子蓄积  $\delta n_m$  之间的关联对该推导至关重要. 输运参数  $J_m, n_m, \sigma_m, \alpha_m, S_m$  以及  $\mu_m$  的严格解析表达式都可以以  $\alpha = -\mu_m / (k_B T)$  的幂函数展开的形式获得. 在准平衡状态下,  $\alpha \rightarrow 0$ , 此时 B-E 分布演化为 Planck 分布, 正如文献 [17–19] 报道的一样. 然而, 在具有相当大  $\alpha$  值的非平衡系统中, 例如在 MI 中施加一个相当大的温度梯度时,  $\alpha$  的 1/2 阶以及更多高阶项对磁振子输运参数有着明显影响. 本文提供的解析表达式为准确理解磁振子输运的真实行为, 特别是化学势的重要作用提供了理论基础.

## 2.2 磁振子扩散方程

在费米子自旋系统中, Fert 等 [26,27] 利用化学势  $\mu$  和非平衡粒子数浓度  $\delta n$  之间的线性关系, 建立了电子自旋的扩散方程, 即  $\nabla^2 \delta n = \delta n / l_s^2$  和  $\nabla^2 \mu = \mu / l_s^2$ , 其中  $l_s$  表示自旋扩散长度. 自旋扩散方程在实验研究中成功地描述了电子自旋的各种输运行为 [28]. 对于玻色子自旋系统, Zhang 等 [18] 沿用 Fert 的方法, 利用磁振子化学势  $\mu_m$  和非平衡磁振子浓度  $\delta n_m$  之间的线性近似, 得到了磁振子扩散方程  $\nabla^2 \delta n_m = \delta n_m / l_m^2$ . 然而, 我们推导的解析表达式 (10d) 揭示了  $\delta n_m$  和  $\mu_m$  之间的非线性关系, 而不是线性关系, 即使在  $\alpha \ll 1$  时, 两者之间也是显著不同于线性关系的根号关系. 此时可忽略高阶小量, 保留小  $\alpha$  的第一个  $\alpha^{1/2}$  项, 得到  $\mu_m = A \delta n_m^2$ , 其中  $A \equiv -\left(\frac{4\pi}{k_B T}\right)^2 D^3$ , 若使用线性近似  $\mu_m \propto \delta n_m$  可能会导致与实际情况的显著偏差, 因此玻色系统的磁振子扩散方程需要重新推导.  $\delta n_m$  和  $\mu_m$  之间的不同关系源于支配玻色子和费米子的不同统计规律, 突出了它们之间的根本差异.

从准粒子系统的连续性方程开始推导:

$$\frac{\partial n_m}{\partial t} + \nabla \cdot J_m = \sigma. \quad (11)$$

在稳态情况下,  $\frac{\partial n_m}{\partial t} = 0$ , 各部分磁振子数浓度  $n_m$  达到动态平衡, 因此, 在一个区域内应该考虑两个过程: 磁振子的向内或向外流动以及磁振子在区域内的产生或湮灭过程. 微区内产生磁振子的速率用  $\sigma$  表示, 其可以表示为  $\sigma = -\delta n_m / \tau_{th}$ , 其中  $\tau_{th}$  表示磁振子的热平衡弛豫时间,  $\tau_{th}$  项与引起磁振子数变化的非弹性散射过程有关, 例如显著的磁振子-声子相互作用. 在 YIG 薄膜中的超快时间尺度的实验观测结果揭示了磁振子晶格弛豫时间  $\tau_{th}$ , 它比磁振子动量守恒的弛豫过程  $\tau_m$  慢得多 [5].

从方程 (3) 中, 磁振子流  $J_m$  的散度为

$$\nabla \cdot J_m \approx -A\sigma_m \nabla^2 (\delta n_m^2) - \alpha_m \nabla^2 T. \quad (12)$$

当系统仅略偏离平衡态时,  $\nabla \sigma_m$ ,  $\nabla \mu_m$ ,  $\nabla \alpha_m$  和  $\nabla T$  都是小量,  $\nabla \sigma_m \nabla \mu_m$  和  $\nabla \alpha_m \nabla T$  都为二阶小量, 均可忽略不计. 将方程 (12) 代入连续性方程, 得到非平衡磁振子  $\delta n_m$  的扩散方程:

$$\nabla^2 (\delta n_m^2) - C_0(T) \nabla^2 T = \frac{\delta n_m}{C_1(T)}, \quad (13)$$

其中  $C_0(T) = -\frac{S_m}{A}$ ,  $C_1(T) = 1 - A\sigma_m \tau_{th} = -\frac{A\sigma_m}{\tau_m} \tau_m \tau_{th}$ , 需要注意的是  $A\sigma_m / \tau_m$  是  $T$  的函数且与  $\tau_m$  无关.

在恒定温度梯度下, 根据非线性关系  $-\mu_m \propto (\delta n_m)^2$ , 方程 (13) 演化为  $\nabla^2 (\delta n_m^2) = \delta n_m / C_1(T)$ , 而不是类似于电子自旋系统的常用形式  $\nabla^2 \delta n_m = \delta n_m / l_m^2$  [27]. 玻色子和费米子扩散方程的这种显著区别反映了玻色子和费米子之间统计规律的固有差异.

## 2.3 与实验结果的对比

### 2.3.1 非平衡磁振子输运— $\nabla T \sim 10^4$ K/mm

本节将讨论磁振子系统由于较大的温度梯度而显著失衡的情况. 例如, 当对 YIG 薄膜施加功率约为 20 mW 的激光进行局部加热时, 将产生如图 3(a) 所示的  $10^4$  K/mm 温度梯度 [20]. 这种温度梯度可以产生大量的非平衡磁振子, 并导致高的化学势. 本节将以文献 [20] 报道的大温度梯度为数据输入, 评估前文所提及理论的适用性, 评估过程将考虑  $\alpha$  的非零项.

文献 [20] 利用对 YIG 进行的布里渊光散射实

验, 可以得到非平衡磁振子和非线性温度梯度的分布, 如图 3(a), (b) 所示 (蓝色圆点) [20]. 将磁振子扩散方程在柱坐标系中展开即可.

通过选取如下参数:  $T = 300$  K,  $D = 1.0027 \times 10^{-39}$  J·m<sup>2</sup>,  $C_0 = -1.5 \times 10^{16}$   $\mu\text{m}^{-6} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $C_1 = -6 \times 10^{-8}$   $\mu\text{m}^5$ . 并且在样品边界  $x = \pm 15$   $\mu\text{m}$  处设定满足  $\delta n_m = 0$  和  $\frac{\partial \delta n_m}{\partial x} = 0$  的边界条件, 磁振子扩散方程的数值解 (方程 (13)) 即可通过迭代方法得到.  $\delta n_m$  沿  $x$  方向的计算分布如图 3(b) 所示, 其变化趋势与实验结果非常接近, 需要特别注意的是, 其在距离中心 2—3  $\mu\text{m}$  处出现一拐点. 若采用线性扩散微分方程, 在温度场没有拐点的情况下,  $\delta n_m$  是不可能出现拐点的. 根据 (10d) 式也可以得到化学势分布  $\mu_m(x)$ , 结果如图 3(c) 所示, 图中的蓝色虚线由文献 [20] 中线性近似法计算得到, 红线由采用我们的非线性关系严格计算得到的, 两者的计算输入均为图 3(b) 所示的  $\delta n_m$ . 根据我们的计算, 在 YIG 样品中心获得了  $\mu_m(x=0) = -6.2$  meV 的峰值结果, 比文献 [20] 中线性响应理论的计算值约大 20 倍, 这种差异是由于采用了不同的  $\delta n_m$  和  $\mu_m$  之间的关系. 从图 3(c) 中可以清楚地发现使用线性近似会带来的显著偏差; 此外, 计算得到的系统中磁振子流的分布表明, 总的磁振子流主要由温度梯度  $J_m^{\nabla T}$  驱动, 而化学势梯度  $J_m^{\nabla \mu}$  引起的磁振子流的贡献抵消了一部分  $J_m^{\nabla T}$ , 如图 3(d) 所示.

我们还需评估在温度梯度  $\nabla T \sim 10^4$  K/mm 下  $\alpha$  的高阶项对磁振子输运参数的影响. 假设 300 K 时的化学势  $\mu_m \sim -1$  meV, 将  $\alpha = -\frac{\mu_m}{k_B T} = \frac{1}{25}$  代入  $\sigma_m$ ,  $\alpha_m$ ,  $S_m$  和  $n_m$  的表达式. 与忽略  $\alpha$  的高阶项相比,  $\sigma_m$ ,  $\alpha_m$ ,  $S_m$  和  $n_m$  的变化分别为 3%, -4.7%, -7.9% 和 3%. 因此, 当室温下化学势达到或超过  $\sim$  meV 量级时, (10d) 式需要更多的  $\alpha$  高阶项才能在  $\delta n_m$  和  $\mu_m$  之间准确转换.

### 2.3.2 准平衡磁振子输运— $\nabla T \sim 1$ K/mm

在传统的横向 SSE 实验 [1,4,7] 中, 通常采用温度梯度为 1 K/mm 量级的线性温度梯度分布来呈现准平衡的磁振子输运. 此时,  $\nabla^2 T = 0$ . 然而,  $\delta n_m$  和  $\mu_m$  在整个系统中都应该是负值. 因此, 在方程 (13) 的右边增加了一个常数项.

对于无限大的样品,  $\delta n_m$  是一个在不同位置保持不变的小量. 因此, 化学势的贡献可以忽略不计, 样品中的磁振子流完全由温度梯度  $-\alpha_m \nabla T$  决定.

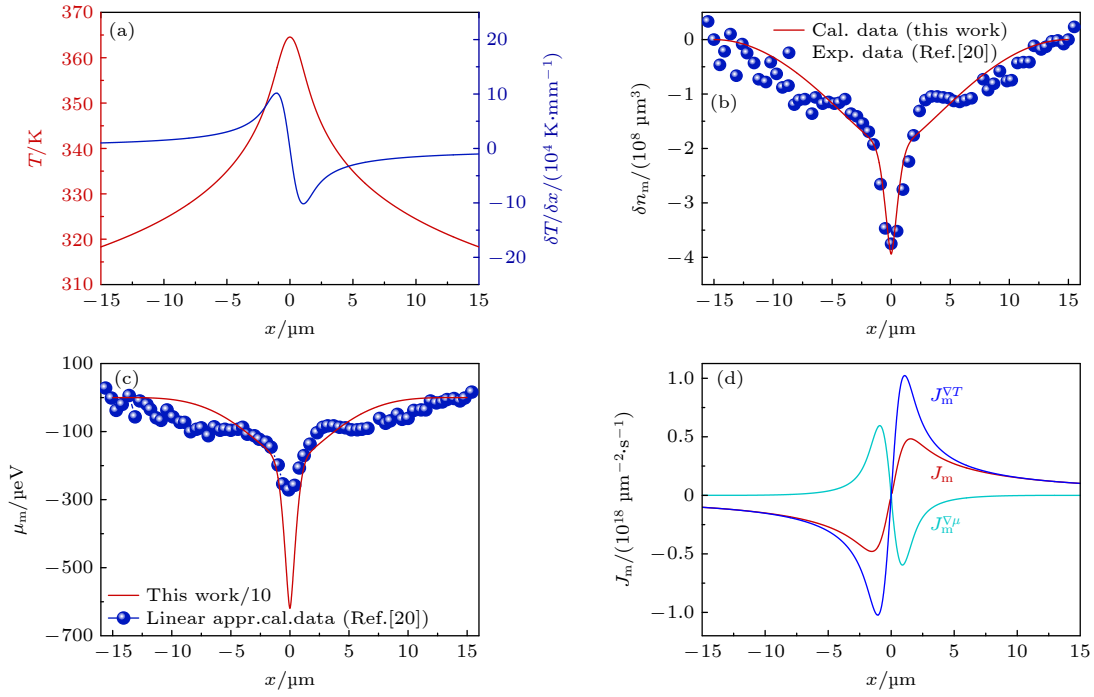


图 3 非平衡磁振子流在非线性温度梯度  $\nabla T \sim 10^4 \text{ K/mm}$  下的输运 (a) YIG 薄膜上激光辐照光斑附近的温度分布和温度梯度, 数据取自文献 [20]; (b) 本文的理论结果与位置相关的非平衡磁振子浓度  $\delta n_m$ , 及其与实验数据的对比; (c) 本文的理论结果与采用线性近似计算的化学势  $\mu_m$  的对比; (d) MI 中的总磁振子流  $J_m$  由两个统计力驱动, 温度梯度  $\nabla T$  和化学势  $\nabla \mu_m$ .  $J_m^{\nabla \mu}$  和  $J_m^{\nabla T}$  对总磁振子流  $J_m$  的贡献

Fig. 3. Out-of-equilibrium magnon transport under a nonlinear temperature gradient  $\nabla T \sim 10^4 \text{ K/mm}$ : (a) Distribution of temperature and temperature gradient near the heating laser spot on the YIG film, data taken from [20]; (b) comparison between our theoretical results and the experimental data for position-dependent nonequilibrium magnon density  $\delta n_m$ ; (c) comparison between our theoretical results and the calculated data of linear approximation for position-dependent chemical potential  $\mu_m$ ; (d) total magnon current  $J_m$  in MI driven by two statistical forces: temperature gradient  $\nabla T$  and chemical potential  $\nabla \mu_m$ . Contribution of  $J_m^{\nabla \mu}$  and  $J_m^{\nabla T}$  to the total magnon current  $J_m$ .

对于一个有限的样品, 在其内部, 非平衡磁振子浓度  $\delta n_m$  是一个常数, 化学势  $\mu_m$  也是一个常数,  $\delta n_m$  和  $\mu_m$  的值仅取决于温度梯度. 磁振子在边界处的积累产生了化学势梯度, 与其相关的磁振子流  $J_m^{\nabla \mu}$  抵消了温度梯度  $J_m^{\nabla T}$  的贡献, 导致样品边界处的磁振子电流  $J_m$  为零.

通过设定在两端点处磁振子流为零的边界条件, 我们计算了线性温度梯度下一维样品中非平衡磁振子浓度的分布特性, 分布特征如图 4(a) 所示. 在样品内部, 除边界处外, 分布呈现一个平台区域, 分别标记为  $\delta n_m^0$  和  $\mu_m^0$ ; 图 4(a), (b) 给出了不同  $\nabla T$  下非平衡磁振子浓度和磁振子化学势的空间分布. 对于一个常规的 SSE 实验, 当  $\nabla T \sim 1 \text{ K/mm}$  时, 我们得到了 YIG 样品中心的  $\delta n_m^0 = -1.18 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$  和  $\mu_m^0 = -0.087 \mu\text{eV}$ . 此外, 图 4(c), (d) 给出了 1—60 K/mm 范围内不同  $\nabla T$  的计算结果, 结果表明非平衡磁振子浓度  $\delta n_m$  的量级为  $-10^{19} \text{ cm}^{-3}$ , 化学势  $\mu_m$  的量级为

$-10 \mu\text{eV}$ ; 同时, 我们在图 4(d) 中也观察到了使用非线性关系和线性近似得到的结果之间的差异.

### 3 结 论

本工作基于玻尔兹曼输运理论, 探求了 MI 中温度梯度驱动的磁振子流的非平衡稳态输运性质, 与以往采用普朗克分布方法不同, 我们考虑化学势非零的 B-E 分布来求解 Boltzmann 方程. 利用 Robinson 展开, 本文得到了各种磁振子输运参数 (包括  $J_m, \sigma_m, \alpha_m, S_m$  和  $n_m$ ) 展开为  $\alpha (= -\frac{\mu_m}{k_B T})$  的幂函数多项式的严格解析式, 不仅明确了非平衡磁振子浓度  $\delta n_m$  与化学势  $\mu_m$  之间的非线性关系:  $\delta n_m \propto -(-\mu_m)^{1/2}$ , 同时也可分析  $\alpha$  的高阶项对各磁振子输运参数的影响. 此外, 本文依据  $\delta n_m$  与  $\mu_m$  之间的非线性关系, 重建了磁振子的扩散方程, 其演变为更为复杂的非线性微分方程. 为了与实验数据进行对比, 本文从理论上确定了 YIG 中  $n_m, \mu_m$

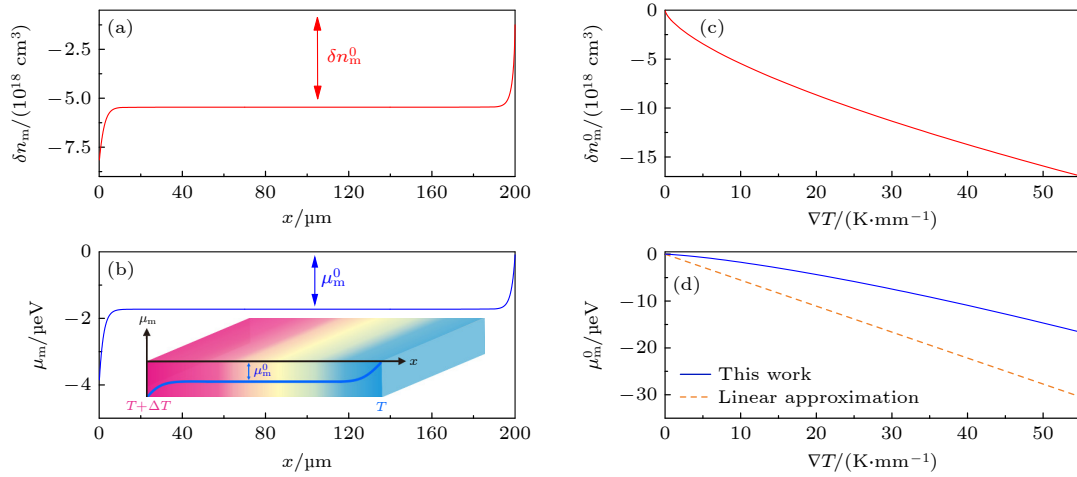


图 4 MI 中恒定温度梯度下的准平衡磁振子输运 (a), (b) 恒定温度梯度下非平衡磁振子浓度  $\delta n_m$  和化学势  $\mu_m$  的数值结果, 插图化学势  $\mu_m$  空间分布示意图; (c), (d) 不同的  $\nabla T$  值下计算得到的样品中心处  $\delta n_m^0$  和  $\mu_m^0$  的值

Fig. 4. Quasi-equilibrium magnon transport under a constant temperature gradient in MI: (a), (b) Numerical results for the nonequilibrium magnon density  $\delta n_m$  and chemical potential  $\mu_m$  at a constant temperature gradient. Inset is schematic diagram illustrating the spatial-dependent chemical potential  $\mu_m$ ; (c), (d) calculated values of  $\delta n_m$  and  $\mu_m$  at the center of the sample for different values of  $\nabla T$ .

和磁振子流  $J_m$  在两种极端情况 ( $\nabla T \sim 1 \text{ K/mm}$  和  $10^4 \text{ K/mm}$ ) 下的空间分布. 在  $\nabla T \sim 1 \text{ K/mm}$  的准平衡态下, 得到  $\delta n_m \sim -10^{18} \text{ cm}^{-3}$  和  $\mu_m \sim -0.1 \text{ μeV}$ . 在  $\nabla T \sim 10^4 \text{ K/mm}$  的远离平衡态下,  $\delta n_m \sim -3.8 \times 10^{20} \text{ cm}^{-3}$  和  $\mu_m \sim -6.2 \text{ meV}$ , 并且此时  $\alpha$  的高阶项已开始对结果有较大影响. 本文的研究结果为非平衡磁振子的输运行为的理解提供了更准确的视角, 磁振子的非平衡输运解决方法也可拓展到类似的玻色子系统, 如声子等.

感谢顾强教授、傅华华教授、别群益教授以及朱永刚博士对玻色-爱因斯坦分布函数的有益讨论, 也感谢向长林博士对扩散方程提出的宝贵意见.

## 参考文献

- [1] Bauer G E W, Saitoh E, van Wees B J 2012 *Nat. Mater.* **11** 391
- [2] Chumak A V, Vasyuchka V I, Serga A A, Hillebrands B 2015 *Nat. Phys.* **11** 453
- [3] Demokritov S O, Demidov V E, Dzyapko O, Melkov G A, Serga A A, Hillebrands B, Slavin A N 2006 *Nature* **443** 430
- [4] Uchida K, Xiao J, Adachi H, et al. 2010 *Nat. Mater.* **9** 894
- [5] Maehrlein S F, Radu I, Maldonado P, et al. 2018 *Sci. Adv.* **4** eaar5164
- [6] Shi Z, Xi Q, Li J X, Li Y F, Aldosary M, Xu Y D, Zhou J, Zhou S M, Shi J 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 277203
- [7] Uchida K I, Adachi H, Ota T, Nakayama H, Maekawa S, Saitoh E 2010 *Appl. Phys. Lett.* **97** 172505
- [8] Uchida K, Takahashi S, Harii K, Ieda J, Koshibae W, Ando K, Maekawa S, Saitoh E 2008 *Nature* **455** 778

- [9] Jaworski C M, Yang J, Mack S, Awschalom D D, Heremans J P, Myers R C 2010 *Nat. Mater.* **9** 898
- [10] Jaworski C M, Myers R C, Johnston-Halperin E, Heremans J P 2012 *Nature* **487** 210
- [11] Seki S, Ideue T, Kubota M, et al. 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 266601
- [12] Jiménez-Cavero P, Lucas I, Anadón A, et al. 2017 *APL Mater.* **5** 026103
- [13] Li J, Shi Z, Ortiz V H, Aldosary M, Chen C, Aji V, Wei P, Shi J 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 217204
- [14] Ito N, Kikkawa T, Barker J, Hirobe D, Shiomi Y, Saitoh E 2019 *Phys. Rev. B* **100** 60402
- [15] Pirro P, Vasyuchka V I, Serga A A, Hillebrands B 2021 *Nat. Rev. Mater.* **6** 1114
- [16] Chumak A V 2019 arXiv: 1901.08934.
- [17] Cornelissen L J, Peters K J H, Bauer G E W, Duine R A, van Wees B J 2016 *Phys. Rev. B* **94** 014412
- [18] Zhang S S L, Zhang S F 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 096603
- [19] Rezende S M, Rodríguez-Suárez R L, Cunha R O, et al. 2014 *Phys. Rev. B* **89** 014416
- [20] Olsson K S, An K, Fiete G A, Zhou J S, Shi L, Li X Q 2020 *Phys. Rev. X* **10** 021029
- [21] Demidov V E, Urazhdin S, Divinskiy B, et al. 2017 *Nat. Commun.* **8** 1579
- [22] Du C, Sar T van der, Zhou T X, Upadhyaya P, Casola F, Zhang H, Onbasli M C, Ross C A, Walsworth R L, Tserkovnyak Y, Yacoby A 2017 *Science* **357** 195
- [23] Robinson J E 1951 *Phys. Rev.* **83** 678
- [24] Yi L Z, Yang D C, Liu M, Fu H H, Ding L J, Xu Y L, Zhang B B, Pan L Q, Xiao J Q 2020 *Adv. Funct. Mater.* **30** 2004024
- [25] Princep A J, Ewings R A, Ward S, et al. 2017 *Npj Quantum Mater.* **2** 63
- [26] Son P C van, Kempen H van, Wyder P 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 2271
- [27] Valet T, Fert A 1993 *Phys. Rev. B* **48** 7099
- [28] Kato Y K, Myers R C, Gossard A C, Awschalom D D 2004 *Science* **306** 1910



# Nonequilibrium steady-state transport properties of magnons in ferromagnetic insulators\*

Yang Dong-Chao<sup>1) #</sup> Yi Li-Zhi<sup>1) #</sup> Ding Lin-Jie<sup>2)</sup> Liu Min<sup>1)</sup>

Zhu Li-Ya<sup>1)</sup> Xu Yun-Li<sup>1)</sup> He Xiong<sup>1)</sup> Shen Shun-Qing<sup>3)</sup>

Pan Li-Qing<sup>1) †</sup> John Q. Xiao<sup>4) ‡</sup>

1) (Hubei Engineering Research Center of Weak Magnetic-field Detection, College of Science, China Three Gorges University, Yichang 443002, China)

2) (Department of Physics, Chongqing Three Gorges University, Chongqing 404100, China)

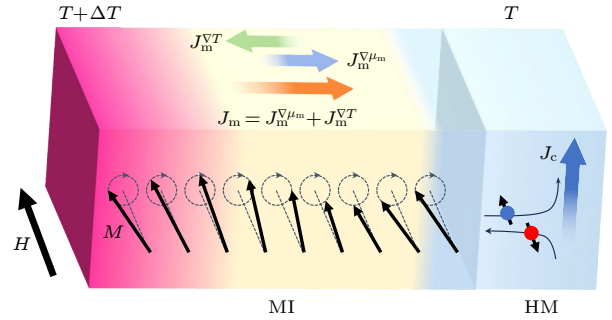
3) (Department of Physics, University of Hong Kong, Hong Kong 999077, China)

4) (Department of Physics and Astronomy, University of Delaware, Newark 19716, USA)

( Received 11 April 2024; revised manuscript received 17 May 2024 )

## Abstract

Understanding nonequilibrium transport phenomena in bosonic systems is highly challenging. Magnons, as bosons, exhibit different transport behavior from fermionic electron spins. This study focuses on the key factors influencing the nonequilibrium transport of magnons in steady states within magnetic insulators by taking  $\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$  (YIG) for example. By incorporating the Bose-Einstein distribution function with a non-zero chemical potential  $\mu_m$  into the Boltzmann transport equation, analytical expressions for transport parameters in power of  $\alpha$  ( $= -\mu_m/(k_B T)$ ) are obtained under the condition  $\alpha < 1$ . It is the biggest different from previous researches that our theory establishes a nonlinear relationship between the chemical potential and the nonequilibrium particle density  $\delta n_m \propto -\alpha^{1/2} \propto -(-\mu_m)^{1/2}$  for magnons under  $\alpha \ll 1$ . For a large chemical potential, higher-order terms of  $\alpha$  must be taken into account. Owing to this nonlinear relationship, the magnon diffusion equation markedly differs from that governing electron spin, which evolves into more complex nonlinear differential equation. We specifically focus on the ferrimagnetic insulator YIG by making a comparison of the spatial distribution of the nonequilibrium magnon density  $\delta n_m$  and chemical potential  $\mu_m$  between two extreme temperature gradients, namely,  $\nabla T \sim 1 \text{ K/mm}$  and  $10^4 \text{ K/mm}$ , which correspond to  $\mu_m$  values on the order of  $-0.1 \mu\text{eV}$  and  $-6.2 \text{ meV}$ , respectively, while still satisfying the prerequisite  $\alpha < 1$ . Given the known temperature gradient distribution, the nonequilibrium magnon density  $\delta n_m$  calculated based on our theory is in good agreement with the experimental result. Our theoretical and numerical findings greatly contribute to a profound understanding of the nonequilibrium magnon transport characteristics in magnetic insulators.



**Keywords:** magnon, nonequilibrium transport, chemical potential, magnon diffusion equation, Boltzmann transport equation

**PACS:** 72.25.-b, 75.30.Ds, 75.76.+j

**DOI:** 10.7498/aps.73.20240498

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12274258) and the National Science Foundation of the USA (Grant No. DMR1505592).

# These authors contributed equally.

† Corresponding author. E-mail: [lpn@ctgu.edu.cn](mailto:lpn@ctgu.edu.cn)

‡ Corresponding author. E-mail: [jqx@udel.edu](mailto:jqx@udel.edu)





## 铁磁绝缘体中磁振子的非平衡稳态输运性质

杨栋超 易立志 丁林杰 刘敏 朱丽娅 许云丽 何雄 沈顺清 潘礼庆 John Q. Xiao

## Nonequilibrium steady-state transport properties of magnons in ferromagnetic insulators

Yang Dong-Chao Yi Li-Zhi Ding Lin-Jie Liu Min Zhu Li-Ya Xu Yun-Li He Xiong Shen Shun-Qing  
Pan Li-Qing John Q. Xiao

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 73, 147101 (2024) DOI: 10.7498/aps.73.20240498

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.73.20240498>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 微波驱动下超导量子比特与磁振子的相干耦合

Coherent coupling in a driven qubit-magnon hybrid quantum system

物理学报. 2022, 71(15): 150302 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220260>

#### 磁子霍尔效应

Magnon Hall effect

物理学报. 2024, 73(1): 017501 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231589>

#### 磁振子宏观效应以及热扰动场对反磁化的影响

Macroeffect of magnons and thermal fluctuation on magnetization reversal

物理学报. 2022, 71(12): 127502 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220168>

#### 磁性拓扑绝缘体中的量子输运现象

Quantum transport phenomena in magnetic topological insulators

物理学报. 2023, 72(17): 177301 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230690>

#### 拉曼光谱研究退火氧化镍中二阶磁振子散射增强

Enhancement of two-magnon scattering in annealed nickel oxide studied by Raman spectroscopy

物理学报. 2021, 70(16): 167201 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210454>

#### 周期驱动系统的非平衡热输运与热力学几何

Nonequilibrium thermal transport and thermodynamic geometry in periodically driven systems

物理学报. 2021, 70(23): 230503 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211723>