

三能级系统熵不确定关系动力学的反馈调控*

余敏^{1)2)†} 郭有能³⁾

1) (湖南文理学院数理学院, 光电信息集成与光学制造技术湖南省重点实验室, 常德 415000)

2) (信息检测与智能处理技术湖南省教育厅重点实验室, 常德 415000)

3) (长沙学院电子信息与电气工程学院, 长沙 410022)

(2025 年 9 月 29 日收到; 2025 年 10 月 26 日收到修改稿)

量子信息科学中, 不确定性原理已从基础性限制演变为一种可操纵的核心资源, 为量子保密通信的安全性和量子计算的优越性提供了根本保障. 本文研究量子反馈控制下两体三能级系统的量子存储支撑熵不确定关系, 利用量子反馈控制调控噪声环境中的熵不确定度及其下限. 分别选取激发态和最大纠缠态作为系统的初态, 通过调节反馈参数发现, 反馈控制可以抑制环境噪声, 显著降低熵不确定度及其下限; 通过数值计算找到了两种初态下降低熵不确定度及其下限的最优反馈参数; 此外发现, 最优反馈控制下, 系统初始的最大纠缠态演化为最大经典关联态, 测量粒子与存储粒子间的经典关联降低了系统稳态的熵不确定度; 最后分析了熵不确定性与系统纯度之间的关系, 发现熵不确定度及其下限的演化与系统纯度呈现负相关, 为通过量子态纯化降低不确定性指明了方向.

关键词: 熵不确定关系, 反馈控制, 噪声环境

DOI: 10.7498/aps.75.20251342

CSTR: 32037.14.aps.75.20251342

1 引言

不确定性原理是量子力学与经典力学的显著区别之一. 1927 年 Heisenberg^[1] 首次提出了位置与动量的不确定关系, Robertson^[2] 将其推广到了任意两个不相容的可观测量. 然而, 基于标准差的 Heisenberg 不确定关系下限是依赖于量子态的, 为了得到一个与量子态无关的更通用形式, Deutsch^[3] 提出可以用 Shannon 熵来量化不确定性. 经过 Kraus, Maassen 和 Uffink 的进一步改进和证明^[4,5], 经典的熵不确定关系被定义为

$$H(Q) + H(R) \geq \log_2(1/c), \quad (1)$$

其中, $H(X)$ 表示测量 $X \in \{Q, R\}$ 结果的概率分布的 Shannon 熵; $c = \max_{k,l} |\langle \psi_k^Q | \psi_l^R \rangle|^2$ 度量可观测量 Q 和 R 间的互补性, 且 ψ_k^X 表示 $X \in \{Q, R\}$ 的

本征态. 后来, 这一界限又得到了一些研究者的进一步完善^[6,7], 使其适用于任意的正算子取值测量 (positive operator-valued measure), 并且在下限中加入了与系统状态的熵相关的依赖项,

$$H(Q) + H(R) \geq \log_2(1/c) + S(\rho), \quad (2)$$

其中, $S(\rho) = -\text{Tr} \rho \log_2 \rho$ 表示量子态的 von Neumann 熵. 更重要的是, 上述不确定关系可以通过量子存储粒子的辅助得到改善, 称为量子存储支撑熵不确定关系. 这一观点最初由 Renes 和 Boileau^[8] 提出, 随后被 Berta 等^[6] 证实, 而且得到了多项实验的验证^[9,10]. 量子存储支撑熵不确定关系可以通过不确定游戏来理解, 不确定游戏由两个游戏玩家 Alice 和 Bob 共同完成, 首先 Bob 制备一个两粒子系统 AB, 他将粒子 B 留下作为量子存储器, 将粒子 A 发送给 Alice, Alice 随机选择不相容的可观测量 Q 或 R 对粒子 A 进行测量, 并且把测量

* 湖南省自然科学基金 (批准号: 2025JJ50382) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: hsdyumin@163.com

选择告诉 Bob, Bob 的任务是预测 Alice 的测量结果. 量子存储支撑熵不确定关系可以度量 Bob 对 Alice 测量结果的不确定性及其下限, 其表达式如下:

$$S(Q|B) + S(R|B) \geq \log_2 \frac{1}{c} + S(A|B), \quad (3)$$

其中, $S(A|B) = S(\rho_{AB}) - S(\rho_B)$ 是态 ρ_{AB} 的量子条件熵, $S(X|B)$ 是经过 X 测量后态

$$\rho_{XB} = \sum_k (|\psi_k^X\rangle\langle\psi_k^X| \otimes I) \rho_{AB} (|\psi_k^X\rangle\langle\psi_k^X| \otimes I)$$

的量子条件熵. 不等式 (3) 的左边称为熵不确定度, 用 U 来表示; 右边称为熵不确定度的下限, 用 U_b 来表示. 如果在此游戏中, 两粒子间存在纠缠, 那么 Bob 预测 Alice 的测量结果精度将被提高. 特别是当两粒子处于最大纠缠态时, Bob 可以精准地预测 Alice 对 Q 和 R 的测量结果. 由 Berta 等 [6] 提出的熵不确定关系适用于两个可观测量, 近年来, 这个关系被推广到了多观测量情况. 例如, Xie 等 [11] 建立了适用于两体系统的多观测量熵不确定关系; Wu 等 [12] 进一步提出了多体系统多观测量的熵不确定关系; Wang 等 [13] 则探讨了多体系统中多观测量熵不确定关系在施瓦西时空背景下的特性. 熵不确定关系作为海森伯不确定性原理在信息理论框架下的深化和推广, 为量子通信中量子密钥分发的绝对安全性提供了严格的理论证明 [14,15]; 在量子信息处理中, 熵不确定关系还是探测量子纠缠的强大工具 [16,17]; 在量子精密测量中熵不确定关系限制了同时测量多个参数的最终精度 [18]. 最近研究还表明, 熵不确定关系下限的紧度可以作为量子电池充电过程中能量转换效率的一个良好指标 [19,20].

由于量子系统不可避免地与周围环境发生相互作用, 使得系统发生退相干, 所以系统的熵不确定性会随之升高. 在量子计算方面, 不确定性的升高对量子计算的可靠性产生严重损害; 在量子通信领域, 过高的不确定性会削弱量子密钥分发协议的安全认证能力; 尤为关键的是, 在量子度量学中, 不确定性升高使得即使利用量子资源也无法达到预期的超灵敏测量效果. 因此, 量子信息处理过程中, 熵不确定性的有效调控成为要解决的关键问题. 随着量子信息技术向实用化发展, 噪声环境下量子存储支撑的熵不确定关系演化动力学及其调控研究引起了广泛关注. Xu 等 [21] 系统研究了不同噪声通道作用下熵不确定关系的特性差异; Yao

等 [22] 与 Rahman 等 [23] 则重点研究了两粒子系统在局域噪声通道中的熵不确定性与量子关联的演化行为; Hajihoseinlou 和 Ahansaz [24] 提出采用经典驱动场有效抑制噪声环境中的熵不确定度下限; Basit 等 [25] 揭示了非平衡态环境与非马尔科夫效应在调控熵不确定度下限中的关键作用; Ali 等 [26] 对比了仅量子存储粒子单独耦合于压缩真空浴, 以及测量粒子与量子存储粒子共同与该环境相互作用对熵不确定关系动力学的影响.

另一方面, 为了操控量子系统达到目标状态或减少退相干的影响, 量子控制已被证明是一种实用且有效的手段 [27,28]. 量子控制方案种类繁多, 量子反馈控制是一种通过将测量结果反馈给系统来控制量子系统动力学的典型方案. 由 Wiseman 和 Milburn [29,30] 提出的马尔科夫量子反馈控制在提高稳态纠缠 [31,32]、加速系统演化 [33,34]、提高参数估计精度 [35–37]、优化非马尔科夫度 [38] 等方面有广泛应用. 不难推测, 量子反馈控制在调控噪声环境中的熵不确定关系方面同样具有广阔的应用前景. 较小的不确定性意味着更低的量子噪声以及对测量结果更精确的预测, 有益于量子计算、量子通信和量子信息处理任务的实施. 因此, 本文旨在利用量子反馈控制降低噪声环境中系统的熵不确定性. 考虑一个局域量子反馈控制下的两体三能级系统, 通过调节反馈参数探究熵不确定关系的演化特性, 致力于找到噪声环境中降低熵不确定性的有效方案, 获得更精确的测量结果.

2 物理模型

本文研究的物理模型如图 1 所示, Bob 制备了一个由两个 V 型三能级原子组成的系统 AB, 并将原子 A 发送给 Alice. 原子 A 与双模耗散腔相互作用, 其能级 $|0\rangle$ 与 $|1\rangle$ ($|2\rangle$) 之间的跃迁与腔模 $a(b)$ 共振耦合, 耦合常数分别为 $g_1(g_2)$, 而能级 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 之间的跃迁在电偶极近似下是禁止的. 原子 A 从能级 $|1\rangle$ ($|2\rangle$) 到能级 $|0\rangle$ 的自发辐射率为 $\gamma_1(\gamma_2)$, 腔模的衰减率为 $\kappa_a(\kappa_b)$. 为了抑制退相干, 利用光电探测器 D 对耗散腔进行探测, 当探测到光子时, 局域的量子反馈控制 U_b 作用在原子 A 上. 与此同时, Bob 的原子 B 被假设独立于噪声环境. 此“非对称噪声”模型 (即仅粒子 A 暴露于噪声环境, 而粒子 B 被隔离) 对应量子通信中“传输粒子遭受信

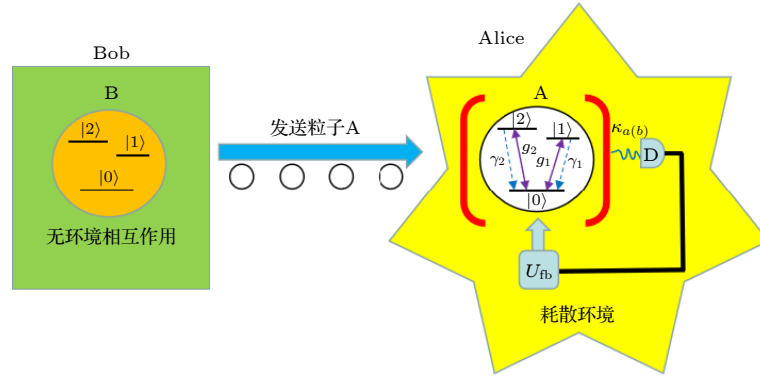


图1 物理模型示意图. Bob 制备两个 V 型三能级原子 AB, 并将原子 A 发送给 Alice. 原子 A 与双模耗散腔相互作用, 其能级 $|0\rangle$ 与 $|1\rangle(|2\rangle)$ 之间的跃迁与腔模 $a(b)$ 共振耦合, 耦合常数分别为 $g_1(g_2)$, 腔模的衰减率为 $\kappa_a(\kappa_b)$. 通过光电探测器 D 监测从腔场泄漏的光子, 当探测到光子时, 局域的量子反馈控制 U_{fb} 作用在原子 A 上. 而 Bob 持有的原子 B 作为量子存储器, 不受噪声环境影响

Fig. 1. Schematic diagram of the physical model. Bob prepares two V-type three-level atoms, A and B, and sends atom A to Alice. During transmission, atom A interacts with a bimodal dissipative cavity, where the transition between energy levels $|0\rangle$ and $|1\rangle(|2\rangle)$ is resonantly coupled to cavity mode $a(b)$ with coupling strengths $g_1(g_2)$, and the decay rates of the cavity modes are $\kappa_a(\kappa_b)$. By monitoring photons leaking from the cavity field with a photodetector D, a local quantum feedback control U_{fb} is applied to atom A whenever a photon is detected. Meanwhile, atom B, held by Bob, serves as a quantum memory and remains isolated from the noisy environment.

道噪声, 本地粒子作为静态量子存储器”这一核心实用场景. 该结构是量子隐形传态、量子密钥分发及分布式量子计算等多种协议的基础.

不考虑量子反馈控制时, 系统的密度算符 ρ 满足以下主方程:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} = & -ig_1[(\sigma_{10}a + \sigma_{01}a^\dagger), \rho] \\ & -ig_2[(\sigma_{20}b + \sigma_{02}b^\dagger), \rho] \\ & + \kappa_a \mathcal{D}[a]\rho + \kappa_b \mathcal{D}[b]\rho \\ & + \gamma_1 \mathcal{D}[\sigma_{01}]\rho + \gamma_2 \mathcal{D}[\sigma_{02}]\rho,\end{aligned}\quad (4)$$

其中, $\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|$; $\mathcal{D}[c]$ 为超算符,

$$\mathcal{D}[c]\rho \equiv c\rho c^\dagger - (c^\dagger c\rho + \rho c^\dagger c)/2. \quad (5)$$

当腔模的衰减率 $\kappa_a(\kappa_b)$ 远大于与系统相关的频率时, 在绝热近似下可以约化掉场的自由度, 得到只保留原子自由度的主方程^[31,32]:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} = & \Gamma_1 \mathcal{D}[\sigma_{01}]\rho + \Gamma_2 \mathcal{D}[\sigma_{02}]\rho \\ & + \gamma_1 \mathcal{D}[\sigma_{01}]\rho + \gamma_2 \mathcal{D}[\sigma_{02}]\rho,\end{aligned}\quad (6)$$

其中, $\Gamma_{1(2)} = \frac{4g_{1(2)}^2}{\kappa_{a(b)}}$ 是等效的集体衰减率. 假设原子的自发辐射率远远小于等效集体衰减率, 原子的自发辐射可以忽略, 从而得到以下主方程:

$$\dot{\rho} = \Gamma_1 \mathcal{D}[\sigma_{01}]\rho + \Gamma_2 \mathcal{D}[\sigma_{02}]\rho. \quad (7)$$

接下来考虑局域的反馈控制作用在原子 A 上的情况, 用一个光电探测器探测耗散腔的输出, 当探测器探测到光子, 反馈哈密顿量 F 立刻作用在

原子上. 反馈控制下的主方程为

$$\dot{\rho} = \Gamma_1 \mathcal{D}[U_{fb1}\sigma_{01}]\rho + \Gamma_2 \mathcal{D}[U_{fb2}\sigma_{02}]\rho, \quad (8)$$

其中, $\mathcal{D}[U_{fb}\sigma] = U_{fb}\sigma\rho\sigma^\dagger U_{fb}^\dagger - (\sigma^\dagger\sigma\rho + \rho\sigma^\dagger\sigma)/2$, 反馈操作 $U_{fb} = \exp(-iF\delta t/\hbar)$ 表示反馈哈密顿量 F 作用在原子有限时间 δt 的演化. 在满足 $U_{fb}U_{fb}^\dagger = 1$ 的条件下, 反馈操作的选取具有多样性, 本文选取局域的反馈操作 $U_{fb1} = \exp[-i\lambda_1(\sigma_{01} + \sigma_{10}) \otimes I]$ 和 $U_{fb2} = \exp[-i\lambda_2(\sigma_{02} + \sigma_{20}) \otimes I]$, 其中 $\lambda_{1(2)}$ 表示反馈参数, I 表示单位算符.

假设系统 AB 的初态为

$$|\phi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle + \gamma|22\rangle,$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1. \quad (9)$$

通过求解主方程 (8), 可以得到任意时刻系统的密度矩阵 $\rho(t)$, 其非零矩阵元如下:

$$\begin{aligned}\rho_{11}(t) &= |\alpha|^2, \\ \rho_{22}(t) &= \left[1 - e^{-t \cos^2(\lambda_1)\Gamma_1}\right] |\beta|^2, \\ \rho_{33}(t) &= \left[1 - e^{-t \cos^2(\lambda_2)\Gamma_2}\right] |\gamma|^2, \\ \rho_{55}(t) &= e^{-t \cos^2(\lambda_1)\Gamma_1} |\beta|^2, \\ \rho_{99}(t) &= e^{-t \cos^2(\lambda_2)\Gamma_2} |\gamma|^2, \\ \rho_{15}(t) &= e^{-t\Gamma_1/2} \alpha\beta^*, \\ \rho_{19}(t) &= e^{-t\Gamma_2/2} \alpha\gamma^*,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_{25}(t) &= i e^{-\frac{1}{2}t(2+\cos 2\lambda_1)\Gamma_1} \\
 &\quad \times \left(-e^{t\Gamma_1/2} + e^{t\Gamma_1 \cos^2 \lambda_1} \right) \beta \beta^* \tan 2\lambda_1, \\
 \rho_{39}(t) &= i e^{-\frac{1}{2}t(2+\cos 2\lambda_2)\Gamma_2} \\
 &\quad \times \left(-e^{t\Gamma_2/2} + e^{t\Gamma_2 \cos^2 \lambda_2} \right) \gamma \gamma^* \tan 2\lambda_2, \\
 \rho_{59}(t) &= e^{-\frac{1}{2}t(\Gamma_1+\Gamma_2)} \beta \gamma^*,
 \end{aligned} \tag{10}$$

且 $\rho_{ij}(t) = (\rho_{ji}(t))^*$.

3 反馈控制下熵不确定度及其下限的动力学

接下来研究量子反馈控制对熵不确定度 U 及其下限 U_b 的调控作用. 本文选取自旋-1 的两个不相容可观测量 $R = S_x$ 和 $Q = S_z$. 此时, 熵不确定度可以表示为

$$U = S(\rho_{S_x B}) + S(\rho_{S_z B}) - 2S(\rho_B). \tag{11}$$

由于 S_x 和 S_z 是完全互补的两个可观测量, 不等式 (3) 中的参数 c 总是等于 $1/2$, 所以下限 U_b 可以表示为

$$U_b = 1 + S(\rho_{AB}) - S(\rho_B). \tag{12}$$

图 2(a) 展现了系统初始处于激发态 $|22\rangle$, 即初态参数 $\alpha = \beta = 0, \gamma = 1$ 时, 熵不确定度 U 关于时间和反馈参数的演化图像, 由于此初态下原子 A 只有能级 $|2\rangle$ 到 $|0\rangle$ 的跃迁, 所以只有反馈操作 U_{B2} 作用在系统上. 从图 2(a) 可以看出: 当没有反馈控制 ($\lambda_2 = 0$) 时, U 随着时间先增大后减小, 最后达到稳定值; 而当反馈控制作用在系统上时, 系统的熵不确定度演化发生了明显变化, 特别是当反馈参数 $\lambda_2 = \pi/2$ 时, 熵不确定度不受噪声环境的影响, 保持在初始值. 这一结果表明, 合适的反馈控制能有效地抑制退相干, 降低熵不确定度. 为了更加清晰地展现反馈控制对熵不确定度及其下限的调控作用, 图 2(b) 对比了没有反馈控制 $\lambda_2 = 0$ 和反馈参数取 $\lambda_2 = \pi/2$ 时, 系统的熵不确定度及其下限的演化. 可以看出, 反馈控制下熵不确定度下限的演化行为与熵不确定度一致, 并且在演化的很长一段时间内, $\lambda_2 = \pi/2$ 的反馈控制相对于无反馈控制情况显著地降低了熵不确定度及其下限. 利用 (10) 式不难发现, 当反馈参数 $\lambda_2 = \pi/2$ 时, $|22\rangle$ 正好是系统

的暗态. 此时反馈控制完全抑制了系统退相干, 从而熵不确定度及其下限不再因噪声环境影响而上升.

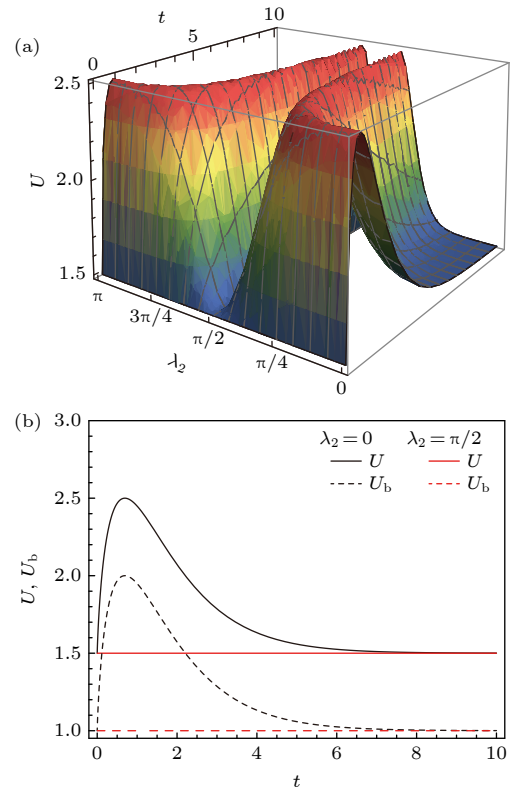


图 2 (a) 初态为激发态时, 熵不确定度 U 关于反馈参数 λ_2 和时间的函数图像; (b) 初态为激发态时, 熵不确定度 U 及其下限 U_b 随时间的演化

Fig. 2. (a) Graph of the entropic uncertainty U as a function of the feedback parameter λ_2 and time when the initial state is an excited state; (b) the evolution of the entropic uncertainty U and its lower bound U_b over time when the initial state is the excited state.

图 3 给出了系统初始处于最大纠缠态 $1/\sqrt{3}(|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle)$, 即初态参数 $\alpha = \beta = \gamma = 1/\sqrt{3}$ 时, 熵不确定度及其下限在不同反馈参数下的时间演化图像. 此初态下原子 A 既有能级 $|2\rangle$ 到 $|0\rangle$ 的跃迁, 也有能级 $|1\rangle$ 到 $|0\rangle$ 的跃迁, 所以反馈操作 U_{B1} 和 U_{B2} 都作用在系统上. 从图 3 可以看出, 当没有反馈控制时, 由于噪声环境的影响, 系统的熵不确定度及其下限随着时间先逐渐上升再下降, 最终达到某个稳定值. 而当加入反馈控制后, 熵不确定度及其下限都能得到相对降低, 且反馈参数 λ_1 和 λ_2 的不同取值产生不同的降低效果. 这些结果表明, 反馈控制可以有效地抑制系统退相干, 合适的反馈参数能更好地抑制退相干, 降低熵不确定度及其下限. 为了找到降低熵不确定度及其下限的最优

反馈参数, 图 4 展现了 $t = 1$ 时, 熵不确定度关于反馈参数 λ_1 和 λ_2 的三维图像. 可以发现, 当反馈参数 λ_1 和 λ_2 同时取 $\pi/2$ 时, 熵不确定度最低. 由于熵不确定度下限的演化与熵不确定度同步, 所以 $\lambda_1 = \lambda_2 = \pi/2$ 也是降低熵不确定度下限的最优反馈参数.

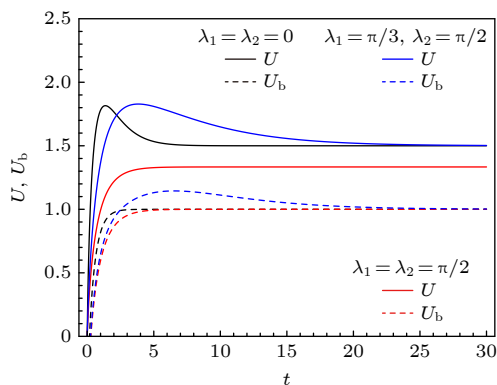


图 3 初态为最大纠缠态时熵不确定度 U 及其下限 U_b 随时间的演化

Fig. 3. Evolution of the entropic uncertainty U and its lower bound U_b over time when the initial state is a maximally entangled state.

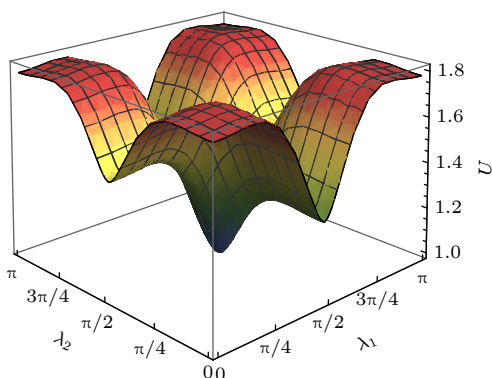


图 4 初态为最大纠缠态时熵不确定度 U 关于反馈参数 λ_1 和 λ_2 的函数图像 (时间 $t = 1$)

Fig. 4. Entropic uncertainty U as a function of the feedback parameter λ_1 and λ_2 when the initial state is a maximally entangled state. The time $t = 1$.

从图 3 还可以看出, 最优反馈控制 $\lambda_1 = \lambda_2 = \pi/2$ 不仅降低了演化过程中系统的熵不确定度及其下限, 还降低了长时演化后系统稳态的熵不确定度. 将反馈参数 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 和 $\lambda_1 = \lambda_2 = \pi/2$ 分别代入 (10) 式, 可以得到 $t \rightarrow \infty$ 时没有反馈控制和最优反馈控制下系统的稳态, 分别为

$$\begin{aligned} \rho_0(t \rightarrow \infty) &= 1/3(|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |02\rangle\langle 02|) \\ &= 1/3|0\rangle\langle 0| \otimes (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\rho_{\pi/2}(t \rightarrow \infty) = 1/3(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11| + |22\rangle\langle 22|). \quad (14)$$

对比 (13) 式和 (14) 式不难发现, 没有反馈控制时系统的稳态为直积态, 此时 AB 原子间没有任何关联. 而当反馈控制 $\lambda_1 = \lambda_2 = \pi/2$ 作用在系统上时, 系统的稳态为最大经典关联态 [39,40], 虽然此时 AB 原子间没有量子关联, 但存在最大的经典关联. AB 原子间的经典关联为 Bob 提供了原子 A 的部分信息, 从而 Bob 对测量结果预测的准确度随之提高, 表现为熵不确定度的降低.

4 讨 论

上述研究表明合适的反馈控制可以抑制系统退相干, 从而降低熵不确定度及其下限. 为了更好地理解熵不确定关系的这些动力学特性, 这里借助于系统的纯度 $P = \text{Tr}(\rho^2)$ 来讨论.

图 5(a) 和图 5(b) 分别表示系统初始处于激发态 $|22\rangle$ 和最大纠缠态 $1/\sqrt{3}(|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle)$ 时, 系统的纯度 P 关于时间的演化图像. 可以看出,

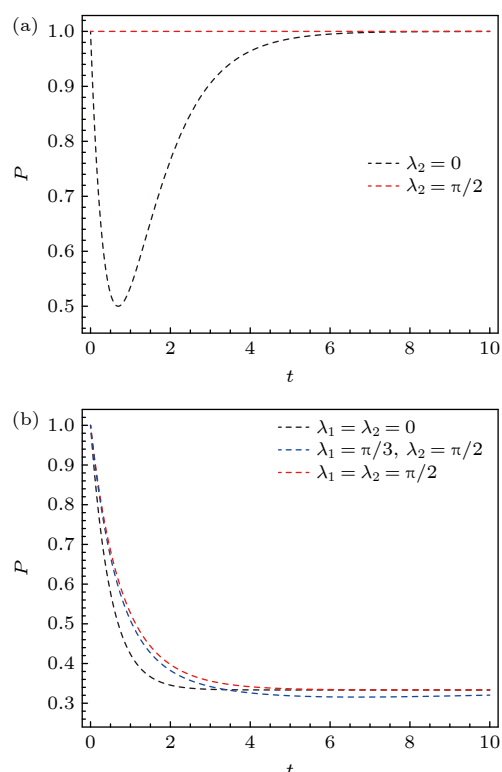


图 5 系统纯度 P 随时间的演化 (a) 初态为激发态; (b) 初态为最大纠缠态

Fig. 5. Evolution of purity P of the system: (a) The initial state is a excited state; (b) the initial state is a maximally entangled state.

反馈控制可以有效地调控系统纯度的演化. 总体来看, 系统纯度的演化正好与熵不确定度及其下限的演化 (图 2(b) 和图 3) 相反, 即系统的纯度与熵不确定度及其下限呈现负相关.

仔细观察不等式 (3) 会发现, 量子存储支撑熵不确定关系可以改写为

$$S(Q|B) + S(R|B) \geq \log_2 \frac{1}{c} + S(\rho_{AB}) - S(\rho_B). \quad (15)$$

由于原子 B 总是独立于噪声环境, 所以在演化过程中子系统 B 一直保持在初始态而不随时间演化, 即 $S(\rho_B)$ 与时间无关. 又因为选择了完全互补的可观测量 S_x 和 S_z , 所以 $\log_2 \frac{1}{c} \equiv 1$. 当系统初始处于激发态 $|22\rangle$ 或最大纠缠态 $1/\sqrt{3}(|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle)$ 时, 不等式 (15) 分别表示如下:

$$S(Q|B) + S(R|B) \geq 1 + S(\rho_{AB}), \quad (16)$$

$$S(Q|B) + S(R|B) \geq 1 - \log_2 3 + S(\rho_{AB}). \quad (17)$$

此时, 系统熵不确定度下限 (与熵不确定度演化同步) 的演化只与系统的 von Neumann 熵 $S(\rho_{AB})$ 有关. 而 $S(\rho_{AB})$ 精确地衡量了 ρ_{AB} 与纯态的偏差 [41]. 对于纯态, $S(\rho_{AB})$ 值为 0, 且其值越大, 态 ρ_{AB} 的混合度越高. 因此, 从不等式 (16) 和 (17) 不难得到, 系统的熵不确定关系与系统的混合度呈现正相关, 即与系统的纯度负相关. 这一关系揭示了熵不确定性的内在物理根源: 系统的混合度越高, 其所包含的来自环境的外部随机信息就越多, 从而导致对系统本身可观测量的信息模糊性 (即熵不确定度) 越大. 反之, 系统纯度越高, 其量子态越确定, 我们拥有的信息就越完整, 测量结果的不确定性自然降低.

需要指出的是, 虽然本文重点讨论了激发态和最大纠缠态这两种典型初态, 但数值模拟表明, 对于一般纠缠初态 ($|\alpha| \neq |\beta| \neq |\gamma|$), 量子反馈控制对熵不确定度的调控效果具有相似性——最优反馈参数均为 $\pi/2$, 且熵不确定度的降低均源于系统纯度的提升. 本文选择最大纠缠态作为重点研究对象, 是基于以下两方面考虑: 一方面, 它在量子信息处理中作为关键资源态具有不可替代的特殊地位; 另一方面, 它在最优反馈控制下能演化至经典关联最大的稳态, 研究其在反馈控制下的演化, 能够最清晰地揭示量子关联到经典关联的转化过程, 以及这一过程对熵不确定度的抑制作用.

5 结 论

本文选取激发态和最大纠缠态作为两体三能级系统的初态, 研究量子反馈控制下系统熵不确定度及其下限的演化特性. 研究表明: 当合适的反馈控制作用在测量粒子上时, 系统的熵不确定度及其下限都得到了显著降低, 这是因为反馈控制有效地抑制了系统退相干. 利用数值计算, 本文找到了两种初态下降低熵不确定度及其下限的最优反馈参数为 $\pi/2$. 通过研究系统长时间演化后稳态的熵不确定度, 发现最优反馈控制下, 系统初始的最大纠缠态演化为最大经典关联态, 测量粒子与存储粒子间的经典关联有效降低了系统稳态的熵不确定度. 为了理解系统熵不确定度及其下限降低的物理机制, 本文还研究了系统纯度的动力学演化, 发现熵不确定度及其下限的降低正是源于所研究系统纯度的升高. 总之, 本文利用量子反馈控制找到了噪声环境中降低熵不确定度及其下限的有效方法, 为量子信息处理过程中熵不确定关系的调控提供了一个可行的理论方案.

参考文献

- [1] Heisenberg W 1927 *Z. Phys.* **43** 172
- [2] Robertson H P 1929 *Phys. Rev.* **34** 163
- [3] Deutsch D 1983 *Phys. Rev. Lett.* **50** 631
- [4] Kraus K 1987 *Phys. Rev. D* **35** 3070
- [5] Maassen H, Uffink J B M 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 1103
- [6] Berta M, Christandl M, Colbeck R, Renes J M, Renner R 2010 *Nat. Phys.* **6** 659
- [7] Coles P J, Yu L, Gheorghiu V, Griffiths R B 2011 *Phys. Rev. A* **83** 062338
- [8] Renes J M, Boileau J C 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 020402
- [9] Prevedel R, Hamel D R, Colbeck R, Fisher K, Resch K J 2011 *Nat. Phys.* **7** 757
- [10] Li C F, Xu J S, Xu X Y, Li K, Guo G C 2011 *Nat. Phys.* **7** 752
- [11] Xie B F, Ming F, Wang D, Ye L, Chen J L 2021 *Phys. Rev. A* **104** 062204
- [12] Wu L, Ye L, Wang D 2022 *Phys. Rev. A* **106** 062219
- [13] Wang T Y, Wang D 2024 *Phys. Lett. B* **855** 138876
- [14] Tomamichel M, Lim C C W, Gisin N, Renner R 2012 *Nat. Commun.* **3** 634
- [15] Ming F, Wang D, Fan X G, Shi W N, Ye L, Chen J L 2020 *Phys. Rev. A* **102** 012206
- [16] Hu M L, Fan H 2012 *Phys. Rev. A* **86** 032338
- [17] Ren L H, Shi Y H, Chen J J, Fan H 2023 *Phys. Rev. A* **107** 052617
- [18] Coles P J, Berta M, Tomamichel M, Wehner S 2017 *Rev. Mod. Phys.* **89** 015002
- [19] Song M L, Li L J, Song X K, Ye L, Wang D 2022 *Phys. Rev.*

- E* **106** 054107
- [20] Song M L, Song X K, Ye L, Wang D 2024 *Phys. Rev. E* **109** 064103
- [21] Xu Z Y, Yang W L, Feng M 2012 *Phys. Rev. A* **86** 012113
- [22] Yao Y B, Wang D, Ming F, Ye L 2020 *J. Phys. B* **53** 035501
- [23] Rahman A R, Abd-Rabbou M Y, Zangi S M, Javed M 2022 *Phys. Scr.* **97** 105101
- [24] Hajihoseinlou H, Ahansaz B 2024 *Laser Phys.* **34** 075202
- [25] Basit A, Ali H, Gao X L, Li P B, Sadiek G, Eleuch H 2024 *Phys. Rev. A* **110** 012429
- [26] Ali H, Basit A, Li P B 2025 *Phys. Rev. A* **111** 032418
- [27] Gillett G, Dalton R B, Lanyon B P, Almeida M P 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 080503
- [28] Monteiro T S 2021 *Nature* **595** 357
- [29] Wiseman H M, Milburn G J 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 548
- [30] Wiseman H M 1994 *Phys. Rev. A* **49** 2133
- [31] Chen Y, Zou J, Li J G, Liu Y, Shao B 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 8365 (in Chinese) [陈宇, 邹健, 李军刚, 邵彬 2010 物理学报 **59** 8365]
- [32] Shao X Q, Zheng T Y, Zhang S 2012 *Phys. Rev. A* **85** 042308
- [33] Yu M, Fang M F, Zou H M 2018 *Chin. Phys. B* **27** 010303
- [34] Hou L, Shao B, Wang C 2023 *Int. J. Theor. Phys.* **62** 47
- [35] Hu Y H, Cao L M, Yang H F, Tan Y G, Wu Q 2020 *Laser Phys. Lett.* **17** 035208
- [36] Wang C, Fang M F 2020 *Quantum Inf. Process.* **19** 112
- [37] Hong H Y, Lu X J, Kuang S 2023 *Chin. Phys. B* **32** 040603
- [38] Zong X L, Song W, Yang M, Cao Z L 2020 *Quantum Inf. Process.* **19** 131
- [39] Modi K, Paterek T, Son W, Vedral V, Williamson M 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 080501
- [40] Ollivier H, Zurek W H 2001 *Phys. Rev. Lett.* **88** 017901
- [41] Boukobza E, Tannor D J 2005 *Phys. Rev. A* **71** 063821

Feedback control of entropic uncertainty relation dynamics in three-level system^{*}

YU Min^{1)2)†} GUO Youneng³⁾

1) (*Human Provincial Key Laboratory of Photoelectric Information Integration and Optical Manufacturing Technology, College of Mathematics and Physics Science, Hunan University of Arts and Science, Changde 415000, China*)

2) (*Key Laboratory of Information Detection and Intelligent Processing Technology of Hunan Provincial Department of Education, Changde 415000, China*)

3) (*School of Electronic Information and Electrical Engineering, Changsha University, Changsha 410022, China*)

(Received 29 September 2025; revised manuscript received 26 October 2025)

Abstract

Uncertainty principle, a cornerstone of quantum mechanics, has evolved from a fundamental limitation into a manageable resource in quantum information science. Precise control over quantum uncertainty is crucial for ensuring the security of quantum cryptography and the advantage of quantum computation. In this work, we investigate the control of the quantum-memory-assisted entropic uncertainty relation in a noisy two-particle qutrit system under quantum feedback control. In our model, Bob prepares a system AB composed of two V-type three-level atoms and sends atom A to Alice. Atom A interacts with a bimodal dissipative cavity. To suppress decoherence, a photodetector is used to monitor the dissipative cavity. Once a photon is detected, a local quantum feedback control is applied to atom A. Meanwhile, Bob's atom B is assumed to be isolated from the noisy environment. The uncertainty is quantified by two incompatible observables, S_x and S_z , corresponding to the spin-1 components.

We analyze the evolution of the entropic uncertainty and its lower bound, with the system initialized in two distinct states: an excited state and a maximally entangled state. Our findings demonstrate that the appropriate quantum feedback control can significantly suppress decoherence, leading to a marked reduction in both the entropic uncertainty and its lower bound. Through numerical simulations, we identify the optimal feedback strength for minimizing the entropic uncertainty and its lower bound to be $\pi/2$ for both initial states. By examining the system's steady-state behavior after prolonged evolution, we find a key insight: under optimal feedback, the initial maximally entangled state evolves into a state with maximal classical correlation. Although no quantum correlation exists in this steady state, the strong classical correlation provides Bob with partial information about atom A, thereby enhancing his prediction accuracy for the measurement outcomes and leading to the observed reduction in the entropic uncertainty. Additionally, we explore the dynamics of the system's purity. The results show a clear negative correlation, indicating that the reduction in entropic uncertainty is directly attributable to the purification of the system effected by the feedback control. In conclusion, the quantum feedback control established in this work may serve as an effective theoretical protocol for suppressing the entropic uncertainty in realistic noisy environments. It provides a viable pathway for manipulating quantum uncertainty to enhance the robustness and performance of quantum information processing tasks.

Keywords: entropic uncertainty relation, feedback control, noisy environment

DOI: [10.7498/aps.75.20251342](https://doi.org/10.7498/aps.75.20251342)

CSTR: [32037.14.aps.75.20251342](https://cstr.cn/32037.14.aps.75.20251342)

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of Human Province, China (Grant No. 2025JJ50382).

[†] Corresponding author. E-mail: hsdyumin@163.com

三能级系统熵不确定关系动力学的反馈调控

余敏 郭有能

Feedback control of entropic uncertainty relation dynamics in three-level system

YU Min GUO Youneng

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 75, 030604 (2026) DOI: 10.7498/aps.75.20251342

CSTR: 32037.14.aps.75.20251342

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.75.20251342>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

熵不确定度关系综述

Review on entropic uncertainty relations

物理学报. 2022, 71(7): 070302 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212197>

关联退相位有色噪声通道下熵不确定关系的调控

Regulation of entropic uncertainty relation in correlated channels with dephasing colored noise

物理学报. 2024, 73(22): 220301 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20241171>

压缩增强的强度噪声抑制机理

Mechanism of suppressing noise intensity of squeezed state enhancement

物理学报. 2025, 74(11): 114205 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20241674>

不确定性的定量描述和熵不确定关系

Quantitative description of uncertainty and entropic uncertainty relation

物理学报. 2023, 72(11): 110303 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222443>

ITER装置中等离子体旋转和反馈控制对电阻壁模影响的数值研究

Numerical study of effect of plasma rotation and feedback control on resistive wall mode in ITER

物理学报. 2021, 70(4): 045201 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201391>

光学反馈线性腔衰荡光谱技术不确定性

Uncertainty of optical feedback linear cavity ringdown spectroscopy

物理学报. 2022, 71(12): 124201 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20220186>